

(This question paper contains 7 printed pages]

ASME-21-MATH-(I)
MATHEMATICS (PAPER-I)

Roll Number

गणित (पेपर-I)

Time Allowed : 3 Hours]

[Maximum Marks : 100

निर्धारित समय : 3 घंटे]

[अधिकतम अंक : 100

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

प्रश्न पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions.

उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें।

1. There are **EIGHT** questions printed both in English & Hindi.
इसमें आठ प्रश्न हैं जो अंग्रेजी और हिंदी दोनों में छपे हैं।
2. Candidate has to attempt **FIVE** questions in all in English or Hindi.
उम्मीदवार को कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर अंग्रेजी या हिंदी में देने हैं।
3. Question No. 1 is compulsory. Out of the remaining **SEVEN** questions, **FOUR** are to be attempted.
प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है। शेष सात प्रश्नों में से चार प्रश्नों के उत्तर दीजिये।
4. All questions carry equal marks. The number of marks carried by a question/ part is indicated against it.
सभी प्रश्नों के समान अंक हैं। प्रत्येक प्रश्न/भाग के नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं।
5. Write answers in legible handwriting. Each part of the question must be answered in sequence and in the same continuation.
सुपाठ्य लिखावट में उत्तर लिखिए। प्रश्न के प्रत्येक भाग का उत्तर उसी क्रम में दिया जाना चाहिए।
6. Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in answer book must be clearly struck off.
प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। आंशिक रूप से दिए गए प्रश्नों के उत्तर को भी मान्यता दी जाएगी यदि उसे काटा नहीं गया हो। छोड़े गए कोई पृष्ठ अथवा पृष्ठ के भाग को पूर्णतः काट दीजिये।
7. Re-evaluation/Re-checking of answer book of the candidate is not allowed.
उम्मीदवार की उत्तरपुस्तिका का पुनर्मूल्यांकन/पुनः जाँच की अनुमति नहीं है।

1. (a) Show that two finite dimensional vector spaces over field F are isomorphic if and only if they have same dimension. 4

सिद्ध कीजिए कि क्षेत्र F के ऊपर दो परिमित विमीय सदिश समष्टि तुल्यकारी हैं यदि और केवल यदि उनकी विमा समान है।

- (b) Determine the directional derivative of the function $f(x, y, z) = 4e^{2x-y+z}$ at the point $(1, 1, -1)$ in the direction towards the point $(-3, 5, 6)$. 4

बिन्दु $(-3, 5, 6)$ की दिशा की ओर, बिन्दु $(1, 1, -1)$ पर, फलन $f(x, y, z) = 4e^{2x-y+z}$ का दिशात्मक अवकल ज्ञात कीजिए।

- (c) Show that the tangent planes at the extremities of any diameter of an ellipsoid are parallel. 4

सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त के किसी भी व्यास के चरम बिन्दुओं पर स्पर्श तल समानान्तर होते हैं।

- (d) Solve the ordinary differential equation $xp^2 - yp - y = 0$ where $p = dy/dx$. 4

सामान्य अवकल समीकरण $xp^2 - yp - y = 0$ को हल कीजिए, जहाँ $p = dy/dx$ है।

- (e) Determine the value of integration $\int_b^{2a} \int_b^{\sqrt{2ay-y^2}} dx dy$. 4

समाकलन $\int_b^{2a} \int_b^{\sqrt{2ay-y^2}} dx dy$ का मान ज्ञात कीजिए।

2. (a) Let V be a non-zero inner product space of dimension n . Then show that V has an orthonormal basis. 10

माना V एक अशून्य आंतरगुणन समष्टि, विमा n का है। तब सिद्ध कीजिए कि V के पास एक लांबिक आधार है।

- (b) Let V be the space of all real valued continuous functions. Define $T : V \rightarrow V$ by :

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Show that T has no eigen value. 10

माना कि V सभी वास्तविक सतत् फलनों का समष्टि है। $T : V \rightarrow V$ निम्न प्रकार से परिभाषित है :

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

सिद्ध कीजिए कि T का अभिलाक्षणिक मान नहीं है।

3. (a) Show that the equation $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ represents a cone if : 6

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$$

यदि $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$, तब सिद्ध कीजिए कि समीकरण $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ एक शंकु को प्रदर्शित करता है।

- (b) Find the maximum and minimum values $u^2 + v^2 + w^2$ subject to the side conditions $\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{5} + \frac{w^2}{25} = 1$ and $w = u + v$. 7

सम्बन्ध $\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{5} + \frac{w^2}{25} = 1$ तथा $w = u + v$ के साथ, फलन $u^2 + v^2 + w^2$ का अधिकतम तथा न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

- (c) Using the concept of Gamma and Beta functions, show that : 7

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

गामा तथा बीटा फलन की धारणा का प्रयोग करते हुए, निम्न को सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

4. (a) Find the directional derivative of $f(x, y) = x^2 y^3 + xy$ at $(2, 1)$ in the direction of a unit vector which makes an angle of $\pi/3$ with x -axis. 6

एक एकल सदिश जो कि x -अक्ष के साथ $\pi/3$ का कोण बनाता है, की दिशा में, बिन्दु $(2, 1)$ पर फलन $f(x, y) = x^2 y^3 + xy$ का दिशात्मक अवकलन ज्ञात कीजिए।

- (b) Show that a function f defined on real line \mathbf{R} is continuous if and only if for each open set G in \mathbf{R} , $f^{-1}(G)$ is an open set in \mathbf{R} . 7

सिद्ध कीजिए कि एक फलन f जो कि वास्तविक रेखा \mathbf{R} पर परिभाषित है, सतत् है यदि और केवल यदि \mathbf{R} में प्रत्येक खुले समुच्चय G के लिए, $f^{-1}(G)$, \mathbf{R} में एक खुला समुच्चय है।

- (c) Test the convergence of the integration $\int_0^4 \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x(x-1)}} dx$. 7

समाकलन $\int_0^4 \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x(x-1)}} dx$ के अभिसरण की जाँच कीजिए।

5. (a) Show that the smallest root of the equation $J_0(x) = 0$ lies in the interval $(2, \sqrt{8})$, where $J_0(x)$ is the Bessel's function of order zero. 5

सिद्ध कीजिए कि समीकरण $J_0(x) = 0$ का न्यूनतम मूल अन्तराल $(2, \sqrt{8})$ में स्थित है जहाँ $J_0(x)$ शून्य कोटि का बेसल फलन है।

(b) Solve ordinary differential equation

$$\{x^2D^2 - (2m - 1)xD + (m^2 + n^2)\} y = n^2x^m \log x$$

where $D = d/dx$.

5

सामान्य अवकल समीकरण

$$\{x^2D^2 - (2m - 1)xD + (m^2 + n^2)\} y = n^2x^m \log x$$

को हल कीजिए, जहाँ $D = d/dx$.

(c) Find series solution near $x = 0$ of the differential equation : 10

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} - y = 0$$

अवकल समीकरण

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} - y = 0$$

का श्रेणी हल $x = 0$ के पास, ज्ञात कीजिए।

6. (a) Show that the radius of curvature R at any point (r, θ) on the curve $r^2 = a^2 \sec 2\theta$ is proportional to r^3 . 5

सिद्ध कीजिए कि वक्र $r^2 = a^2 \sec 2\theta$ की वक्रता त्रिज्या R , बिन्दु (r, θ) पर r^3 के समानुपाती है।

(b) Evaluate $\int_C (x+y)dx - x^2 dy + (y+z)dz$ where C is $x^2 = 4y$, $z = x$ and $0 \leq x \leq 2$. 5

$\int_C (x+y)dx - x^2 dy + (y+z)dz$ ज्ञात कीजिए जहाँ C निम्न प्रकार है :
 $x^2 = 4y$, $z = x$ तथा $0 \leq x \leq 2$.

- (c) Verify Stokes's theorem for the vector field $v = (3x - y) i - 2yz^2 j - 2y^2 zk$, where S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ and $z > 0$.

10

सदिश क्षेत्र $v = (3x - y) i - 2yz^2 j - 2y^2 zk$ के लिए स्टोक्स प्रमेय को सत्यापित कीजिए जहाँ S गोलक $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ तथा $z > 0$ का पृष्ठ है।

7. (a) Determine the centre and radius of the circle in which the sphere $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 19 = 0$ is cut by the plane $x + 2y + 2z + 7 = 0$. 6

वृत्त, जो कि गोलक $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 19 = 0$ समतल $x + 2y + 2z + 7 = 0$ के द्वारा अलग करने पर मिलता है, के केन्द्र तथा त्रिज्या ज्ञात करो।

- (b) Three forces act perpendicular to the sides of a triangle at their middle points and are proportional to the sides. Show that they are in equilibrium. 7

एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दु पर तीन बल लम्बवत् कार्य करते हैं तथा भुजाओं के समानुपाती हैं। सिद्ध करो कि ये सभी बल साम्यावस्था में हैं।

- (c) Show that only law for a central attraction, for which the velocity in a circle at any distance is equal to the velocity acquired in falling from infinity to that distance, is that of inverse cube. 7

सिद्ध करो कि केन्द्रीय खिंचाव के नियम, जिसके लिए किसी दूरी पर वृत्त में वेग अनन्त से दूरी पर अधिगृहीत वेग के बराबर है, व्युत्क्रम घन के होते हैं।

8. (a) The resultant of two forces acts along a line perpendicular to one force and is in magnitude half the other. Compute the angle between forces. 10
दो बलों का सदिश योग जो कि एक बल पर लम्बवत् रेखा के साथ तथा दूसरे के बल के आधे मैग्नीट्यूड पर कार्य करता है। इन बलों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

- (b) A particle m is attached to a light wire which is stretched tightly between two fixed points with a tension T . If a, b are the distances of the particle from the two ends, then show that the period of the small transverse oscillation of m is $2\pi\sqrt{mab / T(a + b)}$. 10

एक कण m , एक हल्के तार जो कि दो नियत बिन्दुओं के बीच तनाव T के साथ है, पर संलग्न है। यदि a तथा b , दो सिरों से कण m की दूरियाँ हैं, तब सिद्ध करो कि m के लघु अनुप्रस्थ दोलक का काल $2\pi\sqrt{mab / T(a + b)}$ है।

