HAS-(mains)-2021

This question paper contains **7** printed pages]

ASME-21-MATH-(II)

Roll Number

MATHEMATICS (PAPER-II)

गणित (पेपर-II)

Time Allowed : 3 Hours] [Maximum Marks : 100

निर्धारित समय : 3 घंटे] [अधिकतम अंक : 100

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

प्रश्न पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions.

उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें।

1. There are **EIGHT** questions printed both in English & Hindi.
   इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो अंग्रेजी और हिंदी दोनों में छपे हैं।
2. Candidate has to attempt **FIVE** questions in all in English or Hindi.
   उम्मीदवार को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर अंग्रेजी या हिंदी में देने हैं।
3. Question No. **1** is compulsory. Out of the remaining SEVEN questions, **FOUR** are to be attempted.
   प्रश्न संख्या **1** अनिवार्य है। शेष सात प्रश्नों में से **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिये।
4. *All* questions carry equal marks. The number of marks carried by a question/part is indicated against it.
   सभी प्रश्नों के समान अंक हैं। प्रत्येक प्रश्न/भाग के नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं।
5. Write answers in legible handwriting. Each part of the question must be answered in sequence and in the same continuation.
   सुपाठ्य लिखावट में उत्तर लिखिए। प्रश्न के प्रत्येक भाग का उत्तर उसी क्रम में दिया जाना चाहिए।
6. Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in answer book must be clearly struck off.
   प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। आंशिक रूप से दिए गए प्रश्नों के उत्तर को भी मान्यता दी जाएगी यदि उसे काटा नहीं गया हो। छोड़े गए कोई पृष्ठ अथवा पृष्ठ के भाग को पूर्णत: काट दीजिये।
7. Re-evaluation/Re-checking of answer book of the candidate is not allowed.
   उम्मीदवार की उत्तरपुस्तिका का पुनर्मूल्यांकन/पुन: जाँच की अनुमति नहीं है।

1. (*a*) Show that every closed subspace of a complete metric space (X, d) is complete. 4

सिद्ध कीजिए कि एक पूर्ण दूरीक समष्टि (X, d) का प्रत्येक परिबद्ध उपसमष्टि पूर्ण है।

(*b*) Find a transformation $w = f(z)$ which maps the real axis the z-plane on to the real axis in the w-plane. 4

रूपान्तरण $w = f(z)$ ज्ञात कीजिए जो कि z-समतल के वास्तविक अक्ष को w-समतल के वास्तविक अक्ष में प्रतिचित्रित करता है।

(*c*) Give an example of a finite abelian group which is not cyclic. 4

एक परिमित आबेलियन समूह का उदाहरण दीजिये, जो कि चक्रीय नहीं है।

(*d*) Show by an example that if functions f and g are not Riemann integrable, then $f.g$ is Riemann integrable. 4

एक उदाहरण के द्वारा सिद्ध कीजिए कि यदि फलनों f तथा g जो रीमान समाकलनीय नहीं हैं, तब $f.g$ रीमान समाकलनीय है।

(*e*) Determine the inverse Laplace transform of :

$$\log \frac{s+c}{s+d}$$

where c and d are constants. 4

$\log \frac{s+c}{s+d}$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात कीजिए जहाँ c तथा d स्थिरांक हैं।

2. (*a*) Show that a finite group having more than two elements has a non-trivial automorphism. 6

सिद्ध कीजिए कि एक परिमित समूह, जिसमें दो से ज्यादा अवयव हैं, अतुच्छ स्वाकारिता रखता है।

(b) Prove that every quotient group of cyclic group is cyclic. Does converse of this statement hold ? Justify your answer with an example. 7

सिद्ध कीजिए कि चक्रीय समूह का प्रत्येक लब्धि समूह चक्रीय है। क्या इसका व्युत्क्रम कथन सत्य है ? एक उदाहरण के द्वारा इसे स्थापित कीजिए।

(c) If $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ is a step function, then show that f is Riemann integrable. 7

यदि $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ एक स्टैप फलन है, तब सिद्ध कीजिए कि f एक रीमान समाकलनी है।

3. (a) Let X be the set of all continuous real valued functions on [0, 1], and let :

$$d(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt$$

Show that the metric space (X, d) is not complete. 10

माना X, [0, 1] पर परिभाषित सतत् वास्तविक फलनों का समुच्चय है तथा माना $d(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt$, तब सिद्ध कीजिए कि दूरीक समष्टि (X, d) पूर्ण नहीं है।

(b) Using the concept of residue, determine the value of integration : 10

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x}\, dx, \text{ when } m > 0$$

रैजिड्यू (अवशेष) की धारणा का प्रयोग करते हुए, निम्न समाकलन को हल कीजिए :

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x}\, dx, \text{ तब } m > 0$$

4. (a) Test the series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\log n}{n}$ for convergence. 6

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\log n}{n}$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

(b) Show that the sequence (s_n) defined by :

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}$$

is divergent. 6

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम (s_n) जो कि निम्न प्रकार से परिभाषित है :

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}$$

अपसारित है।

(c) If the partial sums of the series $\Sigma\, a_n$ are bounded, show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nt}$ converges for $t > 0$. 8

यदि श्रेणी $\Sigma\, a_n$ का आंशिक योग परिबद्ध है, तब सिद्ध कीजिए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nt}$; $t > 0$ के लिए अभिसारित है।

5. (a) Solve the following partial differential equation using Lagrange method :

$$p(z + e^x) + q(z + e^y) = z^2 - e^{x+y}$$

where $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ and $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. 6

निम्न आंशिक अवकल समीकरण को लैग्रान्ज विधि से हल कीजिए :

$$p(z + e^x) + q(z + e^y) = z^2 - e^{x+y}$$

जहाँ $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ तथा $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

(b) Find the root of the equation $x \sin x + \cos x = 0$ by using Newton-Raphson method. 7

न्यूटन-राफ्सन विधि का प्रयोग करके समीकरण $x \sin x + \cos x = 0$ का मान ज्ञात कीजिए।

(c) Find the complete integral of the partial differential equation :

$$2\sqrt{p} + 3\sqrt{q} = 6x + 2y$$

where $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ and $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. 7

निम्न आंशिक अवकल समीकरण का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए :

$$2\sqrt{p} + 3\sqrt{q} = 6x + 2y$$

जहाँ $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ और $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

6. (a) Solve the partial differential equation : 10

$$(D^2 + DD' - 6D'^2)\, z = y \cos x$$

where $D = \frac{\partial}{\partial x}$ and $D' = \frac{\partial}{\partial y}$.

आंशिक अवकल समीकरण :

$$(D^2 + DD' - 6D'^2)\, z = y \cos x$$

को हल कीजिए जहाँ $D = \frac{\partial}{\partial x}$ तथा $D' = \frac{\partial}{\partial y}$.

(b) Solve the partial differential equation using Monge's method :

$$r - t \sin^2 x - p \cot x = 0$$

where $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $r = \dfrac{\partial^2 z}{\delta x^2}$ and $t = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. 10

मैंग विधि का प्रयोग करते हुए, निम्न आंशिक अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$r - t \sin^2 x - p \cot x = 0$$

जहाँ $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $r = \dfrac{\partial^2 z}{\delta x^2}$ तथा $t = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

7. (a) Determine the inverse Laplace transform of $\dfrac{1}{s^2 - e^{-as}}$. 6

$\dfrac{1}{s^2 - e^{-as}}$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात कीजिए।

(b) Using the concept of Laplace Transform, find the solution of the initial value problem :

$$t \frac{d^2 y}{dt^2} + 2t \frac{dy}{dt} + 2y = 2, \ y(0) = 1, y'(0) \text{ is arbitrary.}$$ 8

लाप्लास रूपान्तरण का प्रयोग करते हुए, निम्न प्रारम्भिक मान समस्या को हल कीजिए :

$$t \frac{d^2 y}{dt^2} + 2t \frac{dy}{dt} + 2y = 2, \ y(0) = 1, y'(0) \text{ स्वेच्छ है।}$$

(c) Test for an extremum of the functional :

$$\mathrm{I}[y(x)] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2 y')dx, \ y(0) = 1, y(1) = 2$$

where $y' = dy/dx$. 6

फलनक $\mathrm{I}[y(x)] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2 y')dx, \ y(0) = 1, y(1) = 2$ का चरम मान के लिए परीक्षण कीजिए।

8. (*a*) Determine the maximum error in evaluating the integral :

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx$$

by both the Trapezoidal and Simpson's rules using four subintervals. 10

ट्रैपेजोइडल तथा सिम्पसन नियमों में चार उपअन्तराल का प्रयोग करते हुए समाकलन $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$ की अधिकतम त्रुटि ज्ञात कीजिए।

(*b*) Apply Euler's modified method to find y at $x = 0.1$ to five figures after the decimal point where : 10

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y; \quad y(0) = 0.94$$

दशमलव के पाँच स्थानों तक y का मान $x = 0.1$ पर, आयलर विधि से ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y; \quad y(0) = 0.94$$