



[This question paper contains 04 printed pages]

इस प्रश्न पत्र में 04 मुद्रित पृष्ठ हैं

Roll Number / रोल नंबर: \_\_\_\_\_

HPAS Etc. Combined Competitive (Main) Examination, 2019

हि.प्र.प्र.से. आदि संयुक्त प्रतियोगी (मुख्य) परीक्षा, 2019

Mathematics-II / मैथेमैटिक्स-II

Time Allowed: 3 Hours

Maximum Marks: 100

अनुगत समय: 3 घंटे

अधिकतम अंक: 100

Note / नोट:

1. This question paper contains total seven questions.  
इस प्रश्न पत्र में कुल सात प्रश्न हैं।
2. Attempt any five questions including compulsory question No.1.  
अनिवार्य प्रश्न नंबर 1 सहित किन्हीं पांच प्रश्नों के उत्तर दीजिये।
3. Each question carries equal marks. Marks are divided and indicated against each part of the question. Write answer in legible handwriting. Each part of the question must be answered in sequence and in the same continuation.  
प्रत्येक प्रश्न के समान अंक हैं। प्रश्न के अंकों को विभाजित कर प्रश्न के प्रत्येक भाग के विरुद्ध इंगित किया गया है। उत्तर स्पष्ट लिखावट में लिखें। प्रश्न के प्रत्येक भाग का उत्तर उसी क्रम में दिया जाना चाहिए।
4. Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in answer book must be clearly struck off.  
प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। यदि काटा नहीं है, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो। उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।
5. Re-evaluation / Re-checking of answer book is not allowed.  
उत्तरपुस्तिका के पुनर्मूल्यांकन / पुनः जाँच की अनुमति नहीं है।

1. (a) Discuss the convergence of the series:

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{2!}{3} x^2 + \frac{3!}{4} x^3 + \dots$$

निम्न श्रेणी की अभिसरण की व्याख्या कीजिए।

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{2!}{3} x^2 + \frac{3!}{4} x^3 + \dots \quad (5)$$

- (b) Examine if the function  $u = e^{2xy} \sin(x^2 - y^2)$  is harmonic. Find the complex function  $f(z)$  in terms of  $z$  where  $f(z) = u + iv$

जाँच कीजिए यदि फलन  $u = e^{2xy} \sin(x^2 - y^2)$  लयबद्ध है। तब उस समिश्र फलन  $f(z)$  का

मान  $z$  की terms में निकालिए जबकि  $f(z) = u + iv$  (5)

- (c) Obtain Laplace transform of the function:

$$f(t) = e^{-3t} u(t-2).$$

निम्न फलन  $f(t)$  का लाप्लास ट्रांसफोर्म निकालिए।

$$\text{जहाँ } f(t) = e^{-3t} u(t-2). \quad (5)$$

(d) Obtain the smallest positive root of the equation:

$$x \log_{10} x - 1.2 = 0 \quad \text{correct to 2 decimals, using Newton Raphson method.}$$

निम्न समीकरण का सबसे छोटा धनात्मक रुट

$$x \log_{10} x - 1.2 = 0 \quad (\text{दो दशमलव तक सही}) \quad \text{न्यूटन रेपसन के तरीके से निकालिए।} \quad (5)$$

2. (a) Find the transformation which maps the semi-infinite strip of width  $\pi$  bounded by lines  $v = 0$ ,  $v = \pi$ , and  $u = 0$  into the upper half of the  $z$  plane. (10)

वह परिवर्तन (transformation) निकालिए जो अर्द्ध-अनंत पट्टी, जिसकी चौड़ाई  $\pi$  है व जो रेखाओं  $v = 0$ ,  $v = \pi$ , तथा  $u = 0$  से सीमित है व ऊपरी अर्ध  $z$  समतल को map करती है।

(b) Evaluate  $\int_c \frac{3z^2+z}{z^2-1} dz$  where  $c$  is the circle  $|z-11|=1$  (10)

मान निकालिए  $\int_c \frac{3z^2+z}{z^2-1} dz$  जहाँ  $c$  एक वृत्त है  $|z-11|=1$

3. (a) Show that a cyclic group is necessarily abelian. Show by an example that the converse may not be true. (6)

दिखाइए कि एक चक्रीय ग्रुप आवश्यक रूप से एबेलियन होता है। उदाहरण से यह भी दिखाइए कि इस का विपरीत सत्य नहीं होता है।

(b) Examine if there exists a one to one correspondence between the right and left coset of  $H$  in  $G$ , if  $H$  is any subgroup of  $G$ . (7)

जाँच कीजिए कि एक से एक व्यवहार (one - one correspondence)  $H$  के दाएं और बाएं coset में होती है यदि  $H, G$  का एक सब ग्रुप है।

(c) If  $f: G \rightarrow G'$  is a homomorphism then  $\text{Im}(f)$  is a subgroup to  $G'$ , Prove. (7)

यदि  $f: G \rightarrow G'$  एक समरूपता है तब  $\text{Im}(f), G'$  का सब ग्रुप है, सिद्ध कीजिए।

4. (a) Define a compact metric space. Prove that a closed subset of a compact space is Compact. (10)

एक कॉम्पैक्ट मीट्रिक स्पेस को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि एक कॉम्पैक्ट स्पेस का एक closed सबसेट भी कॉम्पैक्ट होता है।

(b) Show that the integral  $\int_a^\infty \frac{x}{1+x^4 \sin^2 x} dx$  is divergent. (10)

सिद्ध कीजिए की समाकलन  $\int_a^\infty \frac{x}{1+x^4 \sin^2 x} dx$  divergent है।

5. (a) Solve the following equations by Gauss Siedal method, correct to 2 decimals. (10)

$$x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 6$$

$$5x_1 + x_2 - x_3 = 12$$

$$3x_1 - 2x_2 + 8x_3 = -4$$

गॉस सीमुल तरीके से निम्न समीकरणों को हल कीजिए, (दो दशमलव तक सही)।

$$x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 6$$

$$5x_1 + x_2 - x_3 = 12$$

$$3x_1 - 2x_2 + 8x_3 = -4$$

- (b) From the following table, obtain  $f(2.07)$  using the best formula: (10)

x	2.00	2.05	2.10	2.15	2.20	2.25
f(x)	.69315	.71784	.74194	.76547	.78846	.81093

निम्न सारणी से  $f(2.07)$  का मान, सबसे अच्छे सूत्र से ज्ञात कीजिए।

x	2.00	2.05	2.10	2.15	2.20	2.25
f(x)	.69315	.71784	.74194	.76547	.78846	.81093

6. (a) Obtain inverse Laplace Transform of  $f(s) = \log \frac{s+1}{s-1}$ . (6)

$f(s)$  का इन्वर्स लाप्लास ट्रांसफॉर्म ज्ञात कीजिए जहां  $f(s) = \log \frac{s+1}{s-1}$ .

- (b) Find the Laplace transform of the following function  $f(t)$  of period  $2c$ : (7)

$$\text{where } f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < c \\ (2c - t), & c < t < 2c \end{cases}$$

निम्न फलन  $f(t)$ , जिसकी अवधि  $2c$  है, का लाप्लास ट्रांसफॉर्म ज्ञात कीजिए।

$$\text{जबकि } f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < c \\ (2c - t), & c < t < 2c \end{cases}$$

- (c) Solve the following IVP using Laplace transform: (7)

$$x'' + 2x' + 5x = e^{-t} \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$

निम्न IVP का लाप्लास ट्रांसफॉर्म प्रयोग करके हल निकालो।

$$x'' + 2x' + 5x = e^{-t} \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$

7. (a) Find the solution in series of the following differential equation: (10)

$$(1 + x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

निम्न अवकलीये समीकरण का श्रेणी में हल निकालो।

$$(1 + x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

- (b) Solve the partial differential equation  $(x^2 - y^2 - z^2)p + 2xyq = 2xz$   
Where  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $q = \frac{\partial z}{\partial y}$  (10)

निम्न अवकलीये समीकरण का हल निकालो  $(x^2 - y^2 - z^2)p + 2xyq = 2xz$

$$\text{जहां } p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

8. (a) What do the following explain in C Language: (8)

(i) ++nc    (ii) else if (condition)    (iii) to lower (c)    (iv) Pointer  
Statement

C भाषा में निम्न का क्या अर्थ है।

(i) ++ nc    (ii) else if (condition)    (iii) to lower (c)    (iv) Pointer  
Statement

(b) Using the Euler equation, find the extremal of the following functional: (6)

$$\int_a^b (12xy(x) + y'^2) dx$$

ओयलर समीकरण का उपयोग करके, निम्न फंक्शन की extremal मान ज्ञात करो।

$$\int_a^b (12xy(x) + y'^2) dx$$

(c) let f be a continuous function. Then show that f is Riemann integrable. (6)

यदि f एक सतत फलन है तब सिद्ध करो कि f एक रीमैन समाकलन है।

\*\*\*\*\*