[This question paper contains 05 printed pages]

[इस प्रश्न पत्र में 05 मुद्रित पृष्ठ हैं]

Himachal Pradesh Administrative Service Combined Competitive (Main / Written) Examination, 2020

हिमाचल प्रदेश प्रशासनिक सेवा संयुक्त प्रतियोगी (मुख्य / लिखित) परीक्षा, 2020

MATHEMATICS (PAPER-II)

गणित (पेपर-II)

Time allowed: Three Hours | Maximum Marks: 100

निर्धारित समय: तीन घंटे | अधिकत्तम अंक: 100

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

प्रश्न पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions.

उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें।

1. There are EIGHT questions printed both in English & Hindi.
   इसमें आठ प्रश्न हैं जो अंग्रेजी और हिंदी दोनों में छपें हैं।
2. Candidate has to attempt FIVE questions in all in English or Hindi.
   उम्मीदवार को कुल पांच प्रश्नों के उत्तर अंग्रेजी या हिंदी में देने हैं।
3. Question No.1 is compulsory. Out of the remaining SEVEN questions, FOUR are to be attempted.
   प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है। शेष सात प्रश्नों में से चार प्रश्नों के उत्तर दीजिये।
4. All questions carry equal marks. The number of marks carried by a question / part is indicated against it.
   सभी प्रश्नों के समान अंक हैं। प्रत्येक प्रश्न / भाग के नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं।
5. Write answers in legible handwriting. Each part of the question must be answered in sequence and in the same continuation.
   सुपाठ्य लिखावट में उत्तर लिखें। प्रश्न के प्रत्येक भाग का उत्तर उसी क्रम में दिया जाना चाहिए।
6. Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in answer book must be clearly struck off.
   प्रश्नों के प्रयासों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। आंशिक रूप से दिए गए प्रश्नों के उत्तर को भी मान्यता दी जाएगी यदि उसे काटा नहीं गया हो। छोड़े गए कोई पृष्ठ अथवा पृष्ठ के भाग को पूर्णत: काट दीजिये।
7. Re-evaluation / Re-checking of answer book of the candidate is not allowed.
   उम्मीदवार की उत्तरपुस्तिका का पुनर्मूल्यांकन / पुन: जाँच की अनुमति नहीं है।

1. (a) Show that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-logn}$ is a conditionally convergent series.

दिखाइए कि $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-logn}$ एक सप्रतिबंध अभिसारी श्रेणी है। (5)

(b) Determine all group homomorphisms from S_3 to $\mathbb{Z}_3$.

S_3 से $\mathbb{Z}_3$ तक सभी समूह समरूपताओं का निर्धारण कीजिए | (5)

(c) Solve:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\,z\frac{\partial z}{\partial y} = -xy$$

हल कीजिये:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\,z\frac{\partial z}{\partial y} = -xy$$ (5)

(d) Find the value of $y(0.5)$ for $\frac{dy}{dx} = y\,;\ y(0) = 1,$ using Euler's method with step size $h = 0.1$.

आयलर विधि का प्रयोग करते हुए पद आकार $h = 0.1$ के साथ $\frac{dy}{dx} = y\,;\ y(0) = 1,$ के लिए $y(0.5)$ का मान निकालिए। (5)

2. (a) Prove that any subgroup of a cyclic group is cyclic.

सिद्ध कीजिए कि चक्रीय समूह का कोई भी उपसमूह चक्रीय होता है | (7)

(b) Define the order of an element in a group. Let G be a finite group of even order. Show that G has an element of order 2 and that the number of elements of order 2 in G is odd.

समूह के किसी अवयव की कोटि को परिभाषित कीजिए। मान लीजिए G एक सम कोटि का परिमित समूह है। दिखाइये कि G में क्रम 2 का एक अवयव है और G में कोटि 2 के अवयवों की संख्या विषम है। (7)

(c) State Abel's test for convergence of improper integrals. Test the convergence of

$$\int_0^{\infty} \frac{sinx}{\log(x+2)}\,dx\ .$$

प्रसामान्य समाकलों के अभिसरण के लिए अबेल परीक्षण का कथन लिखिए |

$\int_0^{\infty} \frac{sinx}{\log(x+2)}\,dx$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए | (6)

3. (a) State the logarithmic test for convergence of a series. If $\{a_n\}$ is a sequence of real numbers such that $\{n^2 a_n\}$ is a convergent sequence, show that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is an absolutely convergent series.

एक श्रेणी के अभिसरण के लिए लघुगणकीय परीक्षण का कथन लिखिए। यदि $\{a_n\}$ वास्तविक संख्याओं का एक अनुक्रम ऐसा है कि $\{n^2 a_n\}$ एक अभिसारी अनुक्रम है, तो दिखाइये कि $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ एक परम अभिसारी श्रेणी है। (7)

(b) State second mean value theorem of integral calculus. Let $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ be a continuous function such that $\int_0^1 |f(x)|dx = 0$, show that f is identically zero on $[0,1]$.

समाकलन कलन के द्वितीय माध्य मान प्रमेय का कथन लिखिए।

मान लीजिए $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ एक ऐसा सतत फलन है कि $\int_0^1 |f(x)|dx = 0$, तो दिखाइये कि f समानरूप से $[0,1]$ पर शून्यमान है। (7)

(c) Let $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ and let L be the line in the z-plane through $z = 0$ and $z = 1 + i$. Find the image of L under f.

मान लीजिए $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ और z-समतल में L बिन्दुओं $z = 0$ और $z = 1 + i$ से जाने वाली रेखा है | L का f के अंतर्गत प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए | (6)

4. (a) Find the bilinear transformation which maps the points $0,\ i,\ 1+i$ onto $2i,\ -1,\ 0$, respectively.

द्विरेखीय रुपांतरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $0,\ i,\ 1+i$ को क्रमशः $2i,\ -1,\ 0$ पर मानचित्रित करता है| (5)

(b) Prove that every bounded entire function is constant. Is $f(z) = sinz$ bounded on $\mathbb{C}$? Support your answer.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिबद्ध संपूर्ण फलन अचर है। क्या $f(z) = sinz$, $\mathbb{C}$ पर परिबद्ध है? अपने उत्तर का समर्थन करें। (8)

(c) Define a connected metric space. Prove that every closed interval of the real line $\mathbb{R}$ is connected.

संबद्ध दूरिक समष्टि को परिभाषित किजिये। सिद्ध कीजिए कि वास्तविक रेखा $\mathbb{R}$ का प्रत्येक संवृत अंतराल संबद्ध है। (7)

5. (a) Define a continuous function between metric spaces. Prove that any real valued continuous function on a compact metric space is bounded.

दूरिक समष्टिओं के बीच सतत फलन को परिभाषित किजिये | सिद्ध कीजिए की किसी संहत दूरिक समष्टि से वास्तविक मानों वाला सतत फलन परिबद्ध है | (10)

(b) Obtain the interpolating polynomial by Newton's divided difference formula for the following data. Also, find the value of $f(3.5)$.

x	-3	-1	0	3	5
f(x)	-30	-22	-12	330	3458

निम्नलिखित आँकड़ों के लिए न्यूटन के विभाजित अंतर सूत्र द्वारा अंतर्वेशी बहुपद ज्ञात कीजिए तथा $f(3.5)$ का मान भी निकालिए। (10)

X	-3	-1	0	3	5
f(x)	-30	-22	-12	330	3458

6. (a) Find the shortest distance between the parabola $y = x^2$ and the straight line $x - y = 5$.

परवलय $y = x^2$ तथा सरल रेखा $x - y = 5$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। (7)

(b) Solve the following initial value problem using Laplace transform:

$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 4y = x^2, \quad y(0) = 2,\ y'(o) = 1.$

लाप्लास रुपांतर का प्रयोग करके निम्नलिखित प्रारंभिक मान समस्या को हल करें।

$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 4y = x^2, \quad y(0) = 2,\ y'(o) = 1.$ (7)

(c) Find the Laplace transform of the following function $f(x)$ of period 2π:

$$where\ f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi \\ (2\pi - x), & \pi \le x \le 2\pi. \end{cases}$$

आवर्तकाल 2π के निम्न फलन $f(x)$ का लाप्लास रुपांतर ज्ञात कीजिए, जबकि

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi \\ (2\pi - x), & \pi \le x \le 2\pi. \end{cases}$$ (6)

7. (a) Find the general solution of the following partial differential equation:

$D\,(D^2 - D' + 1)(D + 2D' + 1)^3 z = 0,$

where $D \equiv \frac{\partial}{\partial x}$, $D' \equiv \frac{\partial}{\partial y}$.

निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरण का व्यापक हल निकालो:

$D\,(D^2 - D' + 1)(D + 2D' + 1)^3 z = 0,$

जहां $D \equiv \frac{\partial}{\partial x}$, $D' \equiv \frac{\partial}{\partial y}$. (7)

(b) Apply Charpit's method to find the complete integral of the partial differential equation $xp^2 + yq^2 = z$, where $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

चारपिट विधि का प्रयोग करके आंशिक अवकल समीकरण $xp^2 + yq^2 = z$ का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए, जहां $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. (7)

(c) Find a real root of the equation $xe^x - cosx = 0$, using Regula-Falsi method.

रेगुला-फाल्सी विधि का प्रयोग करके समीकरण $xe^x - cosx = 0$ का एक वास्तविक मूल ज्ञात कीजिए। (6)

8. (a) Evaluate the integral $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, correct to three decimal places, by using trapezoidal rule, and Simpson's one third rule taking $h = 0.25$.

समाकल $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ का दशमलव के तीन स्थानों तक सही मान $h = 0.25$ लेकर ट्रॅपेजोइडल नियम, और सिम्पसन के $1/3$ नियम का प्रयोग करके निकालिए। (7)

(b) Find the extremal of the following functional

$v[y(x)] = \int_0^1 (2y + y''^2)\,dx$,

that satisfies the conditions $y(0) = 0$, $y'(0) = y(1) = y'(1) = 1$.

निम्नलिखित फलनक

$v[y(x)] = \int_0^1 (y + y''^2)\,dx$

का चरम ज्ञात कीजिए जो शर्तों $y(0) = 0$, $y'(0) = y(1) = y'(1) = 1$ को पूरा करता हो। (7)

(c) Write flow chart in C language of Runge-Kutta's method of fourth order.

रनगे-कुट्टा की चतुर्थ कोटि की विधि का C भाषा में प्रवाह चार्ट लिखिए। (6)