Range Forest Officer (Main / Written) Examination, 2021

रेंज वन अधिकारी (मुख्य / लिखित) परीक्षा, 2021

STATISTICS

सांख्यिकी

Time Allowed: Three Hours | Maximum Marks: 200

निर्धारित समय: तीन घंटे | अधिकत्तम अंक: 200

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

प्रश्न पत्र विशिष्ट निर्देश

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions.

उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें।

1. There are 08 (eight) questions in all, out of which FIVE are to be attempted.
   कुल 08 (आठ) प्रश्न हैं, जिनमें से पांच प्रश्नों के उत्तर देने हैं।
2. Question Nos.1 and 5 are compulsory. Out of the remaining SIX questions, THREE are to be attempted selecting at least ONE question from each of the two Sections I and II.
   प्रश्न संख्या 1 और 5 अनिवार्य हैं। शेष छह प्रश्नों में से, अनुभागों I और II में प्रत्येक भाग से कम से कम एक प्रश्न सहित किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर देने हैं।
3. All questions carry equal marks. The number of marks carried by a question / part is indicated against it.
   सभी प्रश्नों के अंक समान हैं। प्रत्येक प्रश्न / भाग के अंक इसके विरुद्ध इंगित किये गए हैं।
4. Answers must be written in legible handwriting. Each part of the question must be answered in sequence and in the same continuation.
   उत्तर सुपाठ्य / स्पष्ट लिखावट में लिखें। प्रश्न के प्रत्येक भाग का उत्तर उसी क्रम में दिया जाना चाहिए।
5. Unless otherwise mentioned, symbols and notations have their usual standard meanings. Assume suitable data, if necessary and indicate the same clearly.
   यदि आवश्यक हो तो उपयुक्त डेटा मान लें और उसे स्पष्ट रूप से इंगित करें। जब तक अन्यथा उल्लेख न किया गया हो, प्रतीक और संकेतन अपने सामान्य मानक अर्थ रखते हैं।
6. Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Answer Booklet must be clearly struck off.
   प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। यदि काटा नहीं गया है, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो। उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।
7. Re-evaluation / Re-checking of answer book of candidate is not allowed.
   उम्मीदवार की उत्तर पुस्तिका की पुनर्मूल्यांकन / पुन: जाँच की अनुमति नहीं है।

SECTION-I

अनुभाग-I

1. (i) State and prove Bayes theorem. Let 5 men out of 100 and 25 women out of 10000 are color blind. A color blind person is chosen at random. What is probability of his being male assuming that the number of males and females are in ratio 2:3? (10)

बेज के प्रमेय को कथन सहित सिद्ध कीजिये। मान लें 100 पुरूषों में 5 पुरूष एवं 10000 महिलाओं में 25 महिलाएं वर्णान्ध हैं। एक वर्णान्ध व्यक्ति यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। वह व्यक्ति पुरुष होगा इसकी क्या प्रायिकता होगी अगर पुरूष एवं महिलाओं की संख्या 2:3 के अनुपात में है ?

(ii) If X and Y are independently identically distributed random variables from uniform distribution U(0,10) then show that: (10)

$$E[\,Min\,(X,Y) + Max\,(X,Y)] = E(X) + E(Y)$$

यदि X और Y एक समान बंटन U(0,10) से स्वतंत्र एवं समनातापूर्वक लिए गए यादृच्छिक चर हैं तो दिखाइए कि:

$$E[\,Min\,(X,Y) + Max\,(X,Y)] = E(X) + E(Y)$$

(iii) Examine whether the Weak law of large numbers holds for the mutually independent sequence $\{X_k\}$, which obeys the probability law (10)

$$P(X_k = 2^k) = P(X_k = -2^k) = 2^{-2k-1} \text{ and}$$
$$P(X_k = 0) = 1 - 2^{-2k}.$$

जाँच कीजिये कि क्या परस्पर अपवर्जी क्रम $\{X_k\}$, जो प्रायिकता नियम

$$P(X_k = 2^k) = P(X_k = -2^k) = 2^{-2k-1} \text{ और}$$
$$P(X_k = 0) = 1 - 2^{-2k}$$

का पालन करता है, पर बृहत् संख्याओं का दुर्बल नियम लागू होता है।

(iv) If random variables X and Y have joint have joint probability density function (10)

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & if\ \ 0 < x < y < 1 \\ 0 & otherwise, \end{cases}$$

then find

a) $P(Y < \frac{1}{2} \,\big|\, X < \frac{1}{2})$

b) $P(0 < X < \frac{1}{2} \,\big|\, Y = \frac{3}{4})$

यदि यादृच्छिक चरों X और Y का संयुक्त मात्रा फलन

$$f(x,y)=\begin{cases}2 & \text{यदि } 0<x<y<1\\ 0 & \text{अन्यथा},\end{cases}$$

हो तो , ज्ञात कीजिये

a) $P(Y<\frac{1}{2} \mid X<\frac{1}{2})$

b) $P(0<X<\frac{1}{2} \mid Y=\frac{3}{4})$

2. (i) Suppose that x_i denotes i^{th} natural number and $\overline{Y}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, $\overline{Y}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n+1}x_i$, $\overline{Y}_3=\frac{1}{n}\sum_{i=3}^{n+2}x_i$ and $\overline{Y}_4=\frac{1}{n}\sum_{i=4}^{n+3}x_i$. Show that $\overline{Y}_1,\overline{Y}_2,\overline{Y}_3$ and $\overline{Y}_4$ are in arithmetic progression. (10)

माना कि x_i , i वें प्राकृतिक संख्या को प्रदर्शित करता है एवं $\overline{Y}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, $\overline{Y}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n+1}x_i$, $\overline{Y}_3=\frac{1}{n}\sum_{i=3}^{n+2}x_i$ और $\overline{Y}_4=\frac{1}{n}\sum_{i=4}^{n+3}x_i$ । दिखाइए कि $\overline{Y}_1,\overline{Y}_2,\overline{Y}_3$ और $\overline{Y}_4$ समान्तर श्रेणी में हैं ।

(ii) Prove that Binomial distribution with parameters n and p, tends to Poisson distribution, when $n\to\infty$, $p\to 0$ and $np=\lambda$ (a finite number). If distribution of random variable X is Poisson with parameter $\frac{1}{2}$ then find $E[\Gamma(X+1)]$. (15)

सिद्ध कीजिये कि n और p प्राचल वाला द्विपद बंटन, प्वासा बंटन की ओर अग्रसर होता है, जब $n\to\infty$, $p\to 0$ और $np=\lambda$, एक नियत संख्या हो । यदि यादृच्छिक चर X का बंटन प्राचल $\frac{1}{2}$ के साथ प्वासा हो तो $E[\Gamma(X+1)]$ को ज्ञात कीजिये ।

(iii) Discuss properties of regression coefficients in simple regression. Let regression line of Y on X has negative slope and $\hat{Y}$ represents estimated values of Y. If $\sigma_X^2=160$, $\sigma_{Y-\hat{Y}}^2=50$, $\sigma_Y^2=90$ and regression lines, Y on X and X on Y intersect each other at point (4, 5) then obtain equation of both regression lines. (15)

सरल समाश्रयण में समाश्रयण गुणांको के गुणों पर चर्चा करें। मान लें कि Y पर X की समाश्रयण रेखा का ढलान ऋणात्मक है और $\hat{Y}$, Y के आकलित मानों को दर्शाता है। यदि $\sigma_X^2=160$, $\sigma_{Y-\hat{Y}}^2=50$, $\sigma_Y^2=90$ और Y पर X तथा X पर Y की समाश्रयण रेखाएँ बिंदु (4, 5) पर एक दूसरे को काटते हैं, तो दोनों समाश्रयण रेखाओं का समीकरण प्राप्त कीजिये ।

3. (i) If $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ identically independently distributed random samples from the population having distribution

$$f(x,\theta)=\begin{cases}1-\theta, & x=0\\ \theta, & x=1 \quad 0\le\theta\le 1.\end{cases}$$

then obtain sampling distribution of $T=\sum_{i=1}^{n}x_i$. Mention some characteristics of distribution of T. (15)

यदि $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$, समष्टि बंटन

$$f(x,\theta) = \begin{cases} 1-\theta, & x = 0 \\ \theta, & x = 1 \quad 0 \le \theta \le 1. \end{cases}$$

से एक समान स्वतंत्र रूप से बंटित यादृच्छिक प्रतिदर्श हैं तो $T = \sum_{i=1}^{n} x_i$ का प्रतिदर्श बंटन प्राप्त करें। T के बंटन के कुछ विशेषताओं का उल्लेख कीजिये।

(ii) Let $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ are random samples from a normal population with mean μ and variance σ^2 and $T_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ and $T_2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$. Show that T_1 and T_2 are independent. (15)

मान लें कि $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ माध्य μ और प्रसरण σ^2 वाले एक प्रसामान्य बंटन से यादृच्छिक प्रतिदर्श हैं और $T_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ एवं $T_2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ । दिखाइए कि T_1 और T_2 स्वतंत्र हैं।

(iii) If X and Y are independent χ^2 variables with n_1 and n_2 degree of freedom respectively then obtain distribution of $\frac{X}{Y}$. (10)

यदि X और Y क्रमश: n_1 एवं n_2 स्वातंत्र्य स्तर वाले स्वतंत्र χ^2 चर हैं तो $\frac{X}{Y}$ का बंटन प्राप्त करें।

4. (i) Obtain Cramer-Rao inequality, which provides a lower bound (15)

$$\frac{[\gamma'(\theta)]^2}{I(\theta)}$$

to the variance of an unbiased estimator of $\gamma(\theta)$.

क्रेमर- राव असमयिका को प्राप्त करें जो कि $\gamma(\theta)$ के एक अनभिनत आकलक के प्रसरण की निम्न सीमा

$$\frac{[\gamma'(\theta)]^2}{I(\theta)}$$

को प्रदान करता है।

(ii) Define consistency and unbiasedness of an estimator. Obtain unbiased estimator for θ^2 in case of binomial distribution with parameters n (known) and θ. (10)

एक आकलक की संगति एवं अभिनति की परिभाषा दीजिये। एक द्विपद बंटन , जिसके प्राचल n (ज्ञात) और θ हैं , के लिए θ^2 का अनभिनत आकलक ज्ञात कीजिये।

(iii) The observations obtained from a population with probability density function

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2}\exp(-|x-\theta|); \qquad -\infty < x < \infty$$

are 0.46, 0.38, 0.61, 0.82, 0.59, 0.53, 0.92. Find the maximum likelihood estimator for θ. (15)

एक समष्टि , जिसका प्रायिकता घनत्व फलन

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2}\exp\big(-|x-\theta|\big); \qquad -\infty < x < \infty$$

है , से प्राप्त प्रेक्षण 0.46, 0.38, 0.61, 0.82, 0.59, 0.53, 0.92 हैं। θ का अधिकतम संभाविता आकलक ज्ञात कीजिये।

SECTION-II
अनुभाग-II

5. (i) Let X>1 is critical region for testing the hypothesis $H_0: \theta = 2$ against $H_1: \theta = 1$, on the basis of single observation from the population,

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \theta \exp(-\theta x), & 0 \le x < \infty \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

Show that power of the test is square root of probability of type I error. (10)

मान लें कि समष्टि

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \theta \exp(-\theta x), & 0 \le x < \infty \\ 0, & \text{अन्यथा}. \end{cases}$$

से लिए गए एक प्रेक्षण के आधार पर परिकल्पना $H_0: \theta = 2$ विरूद्ध $H_1: \theta = 1$ की जाँच के लिए X>1 क्रांतिक क्षेत्र है। दिखाएं कि परीक्षण की शक्ति, प्रथम (I) प्रकार के त्रुटि की संभावना का वर्गमूल है ।

(ii) Let $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ a random sample from N(μ,1). Obtain best critical region and most powerful test for testing the hypothesis $H_0: \mu = \mu_0$ against $H_1: \mu < \mu_0$. (10)

मान लें $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$, N(μ,1) से लिए गए यादृच्छिक प्रतिदर्श हैं। परिकल्पना $H_0: \mu = \mu_0$ विरूद्ध $H_1: \mu < \mu_0$ की जाँच के लिए शक्ततम परीक्षण ज्ञात कीजिये और सबसे अच्छा क्रांतिक क्षेत्र प्राप्त कीजिये।

(iii) Discuss Kolmogorov test for goodness of fit. (10)

गुडनेस ऑफ़ फिट की जाँच के लिए कोल्मोगोरोव परिक्षण को समझाइए।

(iv) Let X~N(θ,1). Develop SPRT for testing $H_0: \theta = 3$ against $H_1: \theta = 4$ given that α=0.8 and β=0.03. (10)

मान ले X~N(θ,1). यदि α=0.8 और β=0.03 है तो परिकल्पना $H_0: \theta = 3$ विरूद्ध $H_1: \theta = 4$ के लिए SPRT ज्ञात कीजिये।

6. (i) In a population with N=4, the values of y_i are 2, 4, 7 and 11. Calculate the sample mean $\bar{y}$ for all possible simple random samples (without replacement) of size 2. Verify that $\bar{y}$ is unbiased to population mean. Also verify that $V(\bar{y}) = \frac{N-n}{Nn}S^2$. (15)

N=4 वाली एक समष्टि के y_i का मान 2, 4, 7 और 11 है। 2 आकार के सभी संभव सरल यादृच्छिक प्रतिदर्शों (बिनाप्रतिस्थापन विधि)के लिए प्रतिदर्श माध्य $\bar{y}$ की गणना कीजिए। सत्यापित कीजिये कि $\bar{y}$ समष्टि माध्य पर अनभिनत है। $V(\bar{y}) = \frac{N-n}{Nn}S^2$ को भी सत्यापित कीजिये।

(ii) Explain systematic sampling procedure. Discuss the advantages of this method over simple random sampling. (10)

क्रमित प्रतिचयन विधि को समझाइए। सरल यादृच्छिक प्रतिचयन पर इस पद्धति के लाभों का वर्णन कीजिये।

(iii) Discuss a method of selection of simple random sample. Obtain variance of sample mean in simple random sampling without replacement. (15)

सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श चुनने के एक बिधि को समझाए। प्रतिस्थापन रहित सरल यादृच्छिक प्रतिचयन में प्रतिदर्श माध्य का प्रसरण ज्ञात कीजिये।

7. (i) Explain various principles of experimental design and how they are realized in the Latin Square Design. Give complete analysis of Latin Square Design. (15)

प्रयोगात्मक अभिकल्पना के विभिन्न नियमों एवं ये लैटिन वर्ग अभिकल्प में कैसे प्रदर्शित होते हैं, का वर्णन कीजिये। लैटिन वर्ग अभिकल्प का पूर्ण विश्लेषण दीजिये।

(ii) What is meant by a 'missing plot' in a design of experiment? Discuss Yates' method of estimation of a 'missing plot' observation. (10)

प्रायोगिक अभिकल्प में एक 'लुप्त भूखंड' का क्या अर्थ है। 'लुप्त भूखंड' प्रेक्षण के आकलन की येट्स विधि पर चर्चा करें।

(iii) Define main effects and interaction effects of 2^3 factorial experiments. Describe the computation of main effects and interaction effects. Write ANOVA table when experiment is conducted in r blocks. (15)

2^3 बहु-उपदानी प्रयोग के मुख्य प्रभावों और अन्योन्यक्रिया प्रभावों की परिभाषा दीजिये । मुख्य प्रभाव और अन्योन्यक्रिया प्रभाव की गणना की चर्चा कीजिये । इसकी ANOVA सारिणी लिखिए, जबकि प्रयोग r खंडक में किया गया है ।

8. (i) Explain the purpose of stratification in a sample survey. For a stratified population with the following information, find the size of sample to be selected from each stratum under proportional and Neyman allocation: (15)

Stratum No.	I	II	III	IV
Stratum Size (N_i)	20	25	40	15
Mean square S_i^2	4	16	25	9

Sample size $(n) = 30$.

प्रतिदर्श सर्वेक्षण में स्तरीकरण का उद्देश्य स्पष्ट करें। निम्नलिखित जानकारी के साथ एक स्तरीकृत समष्टि के लिए, आनुपातिक और नेमन आवंटन के तहत प्रत्येक स्तर से चुने जाने वाले नमूने के आकार का पता लगाएं:

स्तर संख्या	I	II	III	IV
स्तर आकार (N_i)	20	25	40	15
माध्य वर्ग S_i^2	4	16	25	9

प्रतिदर्श आकार $(n) = 30$.

(ii) Describe regression method of estimation. Find out the mean square error of linear regression estimator of the population mean and compare it with that of ratio estimator. (15)

आकलन के समाश्रयण विधि को समझाइए । समष्टि के रैखिक प्रतिगमन अनुमानक की औसत वर्ग त्रुटि का पता लगाएं और इसकी तुलना अनुपात अनुमानक से करें। इसकी ANOVA सारिणी लिखिए।

(iii) Define balanced incomplete block design (BIBD). Derive the intra block analysis of BIBD. Write its ANOVA table. Estimate the treatment effect. (10)

संतुलित अपूर्ण खंडक अभिकल्पना (BIBD) की परिभाषा दीजिये । BIBD का अंत: खंड विश्लेषण कीजिये ।

*****