

ASME-23B-MAT-II
MATHEMATICS (PAPER-II)
गणित (पेपर-II)

Time Allowed : 3 Hours
निर्धारित समय : 3 घंटे

[Maximum Marks : 100
अधिकतम अंक : 100]

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

प्रश्न पत्र संबंधी विशेष अनुदेश

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions.

उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें ।

1. There are EIGHT questions printed in both. English and Hindi.
इसमें आठ प्रश्न हैं जो अंग्रेजी और हिन्दी दोनों में छपे हैं ।
2. Candidate has to attempt FIVE questions in all either in English or Hindi.
उम्मीदवार को कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर अंग्रेजी या हिन्दी में देने हैं ।
3. Question No. 1 is compulsory. Out of remaining seven questions, FOUR are to be attempted.
प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है । शेष सात प्रश्नों में से चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।
4. All questions carry equal marks. The number of marks carried by a question/ part are indicated against it.
सभी प्रश्नों के समान अंक हैं । प्रत्येक प्रश्न / भाग के नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं ।
5. Write answers in legible handwriting. Illustrate your answers with suitable sketches and diagrams, wherever considered necessary.
सुपाठ्य लिखावट में उत्तर लिखिए । जहाँ भी आवश्यक समझा जाए, वहाँ अपने उत्तरों को उपयुक्त रेखाचित्रों और आरेखों के साथ स्पष्ट कीजिए ।
6. Each part of the question must be answered in sequence and in the same continuation.
प्रश्न के भाग का उत्तर उसी क्रम में दिया जाना चाहिए ।
7. Attempts of the questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in answer book must be clearly struck off.
प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । आंशिक रूप से दिए गए प्रश्नों के उत्तर को भी मान्यता दी जाएगी यदि उसे काटा नहीं गया हो । खाली छोड़े गए कोई भी पृष्ठ अथवा पृष्ठ के भाग को पूर्णतः काट दीजिए ।
8. Re-evaluation/ re-checking of answer book of the candidate is not allowed.
उम्मीदवार की उत्तरपुस्तिका का पुनर्मूल्यांकन / पुनः जाँच की अनुमति नहीं है ।

1. (a) Suppose G is a finite group of order pq , where p and q are prime numbers such that $p > q$. Show that G has at most one subgroup of order p . 04
- G एक pq कोटी का परिमित समूह है जहां p तथा q अभाज्या संख्या इस प्रकार है कि $p > q$ तब सिद्ध करो की G ज्यादा से ज्यादा एक उपसमूह p कोटी का रखता है।
- (b) If f is Riemann integrable function on interval $[a, b]$, then show that f^2 is also Riemann integrable function. 04
- यदि फलन f अंतराल $[a, b]$ पर रिमान संकलनीय है तब सिद्ध करो कि फलन f^2 भी रिमान संकलनीय है।
- (c) Find the equation whose roots are $2 \cos \frac{\pi}{7}, 2 \cos \frac{3\pi}{7}, 2 \cos \frac{5\pi}{7}$. 04
- समीकरण ज्ञात करो जिसके मूल $2 \cos \frac{\pi}{7}, 2 \cos \frac{3\pi}{7}$ तथा $2 \cos \frac{5\pi}{7}$ हैं।
- (d) Determine the inverse Laplace Transform of the function $\tan^{-1} \frac{2}{s^2}$. 04
- फलन $\tan^{-1} \frac{2}{s^2}$ का व्युत्क्रम लापल्स रूपांतर ज्ञात कीजिए।
- (e) Show that every closed sphere is a closed set. 04
- सिद्ध करो की प्रत्येक बंद गोला एक बंद समुच्चय है।
2. (a) Show that every finitely generated subgroup of $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ is cyclic where \mathbb{Q} is the set of rational numbers. 07
- सिद्ध करो कि $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ का प्रत्येक प्रमितीय उत्पन्न उपसमूह चक्रीय है जहां \mathbb{Q} एक परिमेय संख्याओं का समुच्चय है।
- (b) Show that a subgroup of an infinite cyclic group is infinite. 07
- सिद्ध करो कि अनंत चक्रीय समूह का उप समूह अनंत है।

- (c) Give an example of an infinite group in which every element is of finite order. Justify your answer.

06

एक अनंत समूह का उदाहरण दीजिए जिसमें परिमित कोटि का प्रत्येक अवयव हो। उत्तर की विवेचना कीजिए।

- 3 (a) Show that the function $f(x) = \begin{cases} x & \text{when } x \text{ is rational} \\ -x & \text{when } x \text{ is not rational} \end{cases}$

10

is not Riemann integrable in the interval $[a, b]$ but $|f|$ Riemann is integrable.

सिद्ध करो की फलन $f(x) = \begin{cases} x & \text{जहाँ } x \text{ परिमेय है} \\ -x & \text{जहाँ } x \text{ परिमेय नहीं है} \end{cases}$

अंतराल $[a, b]$ में रिमान समाकलनीय नहीं है लेकिन $|f|$ रिमान समाकलनीय है।

- (b) For what value of m and n , the integral $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} \log x \, dx$ is convergent.

10

m तथा n के किस मानों के लिए, समाकलन $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} \log x \, dx$

अभिसरित है।

4. (a) Let $\langle a_n \rangle$ be a sequence such that $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ then show that

6

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} = l$$

माना $\langle a_n \rangle$ एक अनुक्रम इस प्रकार है कि $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, सिद्ध करो कि

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} = l$$

- (b) Show that every compact subset F of a metric space (X, d) is closed.

6

सिद्ध करो कि दूरीक समिष्ट (X, d) का प्रत्येक कम्पैक्ट उपसमुच्चय बंद है।

- (c) Let (X, d) be a metric space. Then show that any disjoint pair of closed sets in X can be separated by disjoint open sets in X

माना (X, d) एक दूरीक समिष्ट है। तब सिद्ध करो कि X में कोई बंद समुच्चय का भिन्न जोड़ा, X में खुले समुच्चय के भिन्न जोड़ा से अलग हो सकते हैं।

5. (a) Determine the analytic function $f(z) = u + iv$ if $u - v = \frac{\cos x + \sin x - e^{-y}}{2(\cos x - \cosh y)}$ and $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. 10

विश्लेषण फलन $(z) = u + iv$ ज्ञात करो यदि $u - v = \frac{\cos x + \sin x - e^{-y}}{2(\cos x - \cosh y)}$

तथा $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

- (b) Show that transformation $w = z + \frac{1}{z}$ converts the straight line $\arg z = \alpha$; $(|\alpha| < \frac{\pi}{2})$ into a branch of hyperbola of eccentricity $\sec \alpha$. 10

सिद्ध करो कि रूपांतरण $w = z + \frac{1}{z}$, सरल रेखा $\arg z = \alpha$; $(|\alpha| < \frac{\pi}{2})$ को अतिपरवलय की उत्केन्द्रता $\sec \alpha$ की शाखा में बदलता है।

6. (a) Solve partial differential equation $\left(\frac{y-z}{yz}\right)p + \left(\frac{z-x}{zx}\right)q = \frac{x-y}{xy}$ where $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ and $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ 7

आंशिक अवकल समीकरण $\left(\frac{y-z}{yz}\right)p + \left(\frac{z-x}{zx}\right)q = \frac{x-y}{xy}$ को हल कीजिए जहाँ $p =$

$\frac{\partial z}{\partial x}$ तथा $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

- (b) Using Charpit's method, find the solution of partial differential equation 7

$$p^2x + q^2y = z \text{ where } p = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ and } q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

चारपिट विधि का प्रयोग करके, आंशिक अवकल समीकरण $p^2x + q^2y = z$ को हल करो जहाँ $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ तथा $q = \frac{\partial z}{\partial y}$

- (c) Solve partial differential equation 6

$$(D^2 - DD' + D' - 1)z = \cos(x + 2y) + e^y \text{ where } D = \frac{\partial}{\partial x} \text{ and } D' = \frac{\partial}{\partial y}$$

आंशिक अवकल समीकरण $(D^2 - DD' + D' - 1)z = \cos(x + 2y) + e^y$ जहाँ $D = \frac{\partial}{\partial x}$ and $D' = \frac{\partial}{\partial y}$, को हल करो।

- 7 (a) On which curve, the functional $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - y^2 + 2xy)dy$, $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ where $y' = \frac{dy}{dx}$, be extremized. 7

किस वक्र पर फलनीय $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - y^2 + 2xy)dy$, $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ जहाँ $where y' = \frac{dy}{dx}$, चरमपंथी है।

- (b) By applying Gauss's quadrature formula, compute the integral $\int_5^{12} \frac{1}{x} dx$. 7
Also find the error.

गौस क्वाड्रेचर सूत्र का प्रयोग करके, समाकलन $\int_5^{12} \frac{1}{x} dx$ का मान ज्ञात करो। त्रुटि भी ज्ञात कीजिए।

- (c) Show that the rate of convergence of Newton-Raphson method is quadratic and determine the root of the equation $x^{10}-1=0$ with initial point $x_0=0.5$. 6

सिद्ध करो की न्यूटन राफसन विधि की अभिसरण की दर द्विघातीय है तथा समीकरण $x^{10}-1=0$ के मूल, प्रारम्भिक बिंदु $x_0=0.5$ के साथ ज्ञात कीजिए।

- 8 (a) Let the polynomial $\phi(x)$ be of the form $\phi(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x)y_i$ where each Lagrangian function $L_i(x)$ is polynomial in x , of degree less than or equal to n . Then show that $\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1$. 10

माना $\phi(x)$, $\phi(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x)y_i$ के एक रूप में बहुपद है जहाँ प्रत्येक लैग्रेन्जियन फलन $L_i(x)$, x में n के बराबर या n से कम कोटि का बहुपद है। टीवी सिद्ध करो कि

$$\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1.$$

- (b) Using 4th order Runge-Kutta method to solve differential equation $\frac{dy}{dx} = -xy^2$; $y(0) = 1$, on taking $h=0.2$ and determine $y(0.4)$. 10

चौथे क्रम वाले रंग-कट्टा विधि का प्रयोग करते हुए, अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = -xy^2$; $y(0) =$

1 को $h=0.2$ लेकर हल कीजिए तथा $y(0.4)$ का मान ज्ञात करो।