

This question paper contains 8+4 printed pages]

H.P.A.S. (Main)—2011

MATHEMATICS—I

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 150

Note :— Attempt five questions in all. Question No. 1 is compulsory. Four more questions are to be attempted out of the rest. All questions carry equal marks.

कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है। शेष में से चार प्रश्न और कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

1. (a) If $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ and $h : C \rightarrow D$, then show that $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

P.T.O.

- (b) Define normal subgroup. Prove that a subgroup H of a group G is normal iff $xh x^{-1} \in H \forall x \in G$ and $\forall h \in H$.

- (c) Find A^{-1} if :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (d) Simplify :

$$\frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha)^4}{(\sin \beta + i \cos \beta)^5}.$$

- (e) Solve the equation :

$$2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0.$$

- (f) Find :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}.$$

(अ) यदि फलन $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ और $h : C \rightarrow D$ है, तो सिद्ध कीजिए :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

(ब) नार्मल सबग्रुप को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि ग्रुप G का सबग्रुप H नार्मल होगा :

$$xh x^{-1} \in H \text{ प्रत्येक } x \in G \text{ प्रत्येक } h \in H.$$

(स) A^{-1} ज्ञात कीजिए, यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(द) सरल कीजिए :

$$\frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha)^4}{(\sin \beta + i \cos \beta)^5}.$$

(य) समीकरण $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ को हल कीजिए।

(र) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(a) Find all the values of $(-8 - 6i)^{1/2}$.

(b) State and prove Wilson's theorem.

(c) Solve the following equations using matrix methods :

$$x + y + z = 6, x - y + z = 2, 2x + y - z = 1.$$

(अ) $(-8 - 6i)^{1/2}$ के सभी मान ज्ञात कीजिए।

(ब) विल्सन प्रमेय को परिभाषित कीजिए एवं सिद्ध कीजिए।

(स) आव्यूह के माध्यम से निम्न समीकरणों को हल कीजिए :

$$x + y + z = 6, x - y + z = 2, 2x + y - z = 1.$$

3. (a) Prove that the set of numbers of the form

$a + b\sqrt{2}$ with a and b as rational numbers is a

field.

(b) Examine the convergence of the series :

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{x^2}{3\sqrt{2}} + \frac{x^4}{4\sqrt{3}} + \frac{x^6}{5\sqrt{4}} + \dots \infty.$$

(c) Sum the series :

$$\cos \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha \cos 2\alpha + \cos^3 \alpha \cos 3\alpha.$$

(अ) सिद्ध कीजिए कि a और b परिमेय संख्याओं के समुच्चय

$a + b\sqrt{2}$ के रूप में एक फील्ड है।

(ब) अनन्त श्रेणी :

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{x^2}{3\sqrt{2}} + \frac{x^4}{4\sqrt{3}} + \frac{x^6}{5\sqrt{4}} + \dots \infty$$

के अभिसारी के लिए परीक्षण कीजिए।

(स) श्रेणी $\cos \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha \cos 2\alpha + \cos^3 \alpha \cos 3\alpha$ का योग ज्ञात कीजिए।

4. (a) If

$$u = \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right),$$

prove that :

$$\theta = - \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + i \frac{u}{2} \right).$$

(b) Find the equation whose roots are three times the roots of

$$x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0.$$

- (c) If G is a finite group and $a \in G$, then show that :

$$a^{(0)G} = e.$$

- (अ) यदि

$$u = \log \tan (\pi/4 + \theta/2),$$

तो सिद्ध कीजिए कि

$$\theta = -\log \tan \left(\frac{\pi}{4} + i \frac{u}{2} \right) \text{ है।}$$

- (ब) समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल

$$x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0 \text{ के मूलों के तीन गुना हो।}$$

- (स) यदि G एक परिमित समूह है और $a \in G$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$a^{(0)G} = e.$$

5. (a) Prove that the line $x + my + am^2 = 0$ touches the parabola $y^2 = 4ax$. Also find the co-ordinates of the point of contact.
- (b) Find the equation of the ellipse which passes through the origin and has its foci at the points $(1, 0)$ and $(3, 0)$.
- (c) Prove that the centres of the sphere which touch the lines $y = mx, z = c$ and $y = -mx, z = -c$ lie on the surface $mxy + c(1 + m^2)z = 0$.

(अ) सिद्ध कीजिए कि रेखा $x + my + am^2 = 0$, परवलय

$y^2 = 4ax$ को स्पर्श करता है। स्पर्श बिन्दु के मान भी

ज्ञात कीजिए।

(ब) दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(0, 0)$ से

होकर जाता है और उसकी नाभियों के बिन्दु $(1, 0)$,

$(3, 0)$ हैं।

(स) सिद्ध कीजिए कि गोले के केन्द्र जो रेखा $y = mx$,

$z = c$ और $y = -mx, z = -c$ को स्पर्श करते

हैं। सतह $mxy + c(1 + m^2)z = 0$ पर स्थित हैं।

6. (a) Find the :

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} (\sec \theta - \tan \theta).$$

(b) Find the value of x in

$$-2 \leq x \leq 4, \text{ when } 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$$

has a largest value.

(c) If

$$y = e^{x+x} + x^{e+x} + e^{x+x},$$

find $\frac{dy}{dx}$.

(अ) $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} (\sec \theta - \tan \theta)$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ब) $-2 \leq x \leq 4$ में x का मान ज्ञात कीजिए जब

$$2x^3 - 3x^2 - 12x + 5 \text{ एक अधिकतम मान है।}$$

(स) यदि

$$y = e^{x+x} + x^{e+x} + e^{x+x},$$

तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

7. (a) Find the value of :

$$\int_0^{\pi/4} \frac{(\sin x + \cos x)}{(9 + 16 \sin 2x)} dx.$$

- (b) Find the area included between the parabolas :

$$y^2 = 4ax \text{ and } x^2 = 4by.$$

- (c) Find the value of :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x \sin x \cos x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}.$$

(अ) $\int_0^{\pi/4} \frac{(\sin x + \cos x)}{(9 + 16 \sin 2x)} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

- (ब) परवलयों $y^2 = 4ax$ एवं $x^2 = 4by$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(स) $\int_0^{\pi/2} \frac{x \sin x \cos x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

8. (a) Obtain the differential equation of all circles of radius a and centre (h, k) .

(b) Solve :

$$(xy^3 + y) dx + 2(x^2y^2 + x + y^4)dy = 0.$$

(c) Solve :

$$(px - y)(py + x) = a^2p.$$

(अ) समस्त वृत्तों जिनकी त्रिज्या a और केन्द्र (h, k) हो, का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

(ब) हल कीजिए :

$$(xy^3 + y) dx + 2(x^2y^2 + x + y^4)dy = 0.$$

(स) हल कीजिए :

$$(px - y)(py + x) = a^2p.$$