

This question paper contains 8 printed pages]

H.P.A.S. (Main)—2011

MATHEMATICS—II

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 150

Note :— Attempt Question Nos. 1 and 2 which are compulsory and any other *three* questions. All questions carry equal marks.

प्रश्न क्र. 1 तथा 2 अनिवार्य हैं। अन्य कोई तीन प्रश्न और कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

1. (a) If

$$u = t^2\hat{i} - t\hat{j} + (2t + 1)\hat{k}$$

$$v = (2t - 3)\hat{i} + \hat{j} - t\hat{k}$$

then find :

$$\frac{d}{dt}(u \cdot v) \text{ at } t = 1.$$

P.T.O.

(b) Prove that :

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} r^m = m(m+1) r^{m-2}.$$

(अ) यदि :

$$u = t^2 \hat{i} - t \hat{j} + (2t+1) \hat{k} \text{ और}$$

$$v = (2t-3) \hat{i} + \hat{j} - t \hat{k} \text{ है, तब}$$

$$t = 1 \text{ पर } \frac{d}{du} (u \cdot v) \text{ ज्ञात कीजिए।}$$

(b) सिद्ध कीजिए :

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} r^m = m(m+1) r^{m-2} \text{ होता है।}$$

2. (a) State and prove Gauss's theorem.

(b) Prove that :

$$\operatorname{grad} (\bar{a} \cdot \bar{b}) = \bar{a} \times \operatorname{curl} \bar{b} + \bar{b} \times \operatorname{curl} \bar{a} + (\bar{a} \cdot \nabla) \bar{b} \\ + (\bar{b} \cdot \nabla) \bar{a}.$$

(अ) गौस प्रमेय को परिभाषित एवं सिद्ध कीजिए।

(ब) सिद्ध कीजिए :

$$\text{grad } (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times \text{curl } \vec{b} + \vec{b} \times \text{curl } \vec{a} + (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a}.$$

3. (a) Enunciate and derive the principle of virtual work.

(b) Find the C.G. of a quadrant of the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(अ) काल्पनिक कार्य के सिद्धान्त का कथन कीजिए एवं उसे प्राप्त कीजिए।

(ब) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के एक चतुर्थांश का गुरुत्व केन्द्र ज्ञात कीजिए।

4. (a) Show that the attraction of a uniform rod AB on a unit mass at P in the direction parallel to AB varies as $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PB}$.

(b) A sphere of weight W rests between two smooth planes one vertical and the other inclined at an angle α to the vertical. Find the reactions of the planes.

(अ) सिद्ध कीजिए कि एक एकसमान छड़ AB का, बिन्दु P पर स्थित एकांक द्रव्यमान के लिए AB दिशा के समान्तर आकर्षण $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PB}$ के अनुपाती है।

(ब) W भार का एक गोला, दो चिकने समतलों जिनमें से एक ऊर्ध्वाधर है तथा दूसरा इससे α कोण बनाता है, के बीच स्थिर है। समतलों की प्रतिक्रियाएँ ज्ञात कीजिए।

5. (a) Find the attraction of a thin uniform rod at an external point.

(b) A heavy particle slides down the surface of a smooth fixed sphere of radius ' α ' being slightly displaced from rest at the highest point. Find where it will leave the sphere.

(अ) एक पतले समछड़ का बाह्य बिन्दु पर आकर्षण ज्ञात कीजिए।

(ब) एक भारी कण ' α ' त्रिज्या के एक चिकने स्थिर गोले के उच्चतम बिन्दु से विराम से विस्थापित होता है और उसके पृष्ठ पर फिसलता है। ज्ञात कीजिए कि वह गोले को कहीं छोड़ेगा ?

6. (a) A particle moves in a plane with an acceleration which is always directed to a fixed point O in the plane. Find the differential equation of the path.
- (b) A body starts from rest and moves with a uniform acceleration. Find the ratio of the distance covered in n th sec. to the distance covered in n seconds.
- (अ) एक कण तल में स्थित बिन्दु O को केन्द्रित त्वरण से गतिमान है। इसका अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।
- (ब) एक पिण्ड विरामावस्था से शुरू होकर एकसमान त्वरण से गति करता है। n वें सेकण्ड में तय की गयी दूरी तथा n सेकण्ड में तय की गयी दूरी के बीच अनुपात ज्ञात कीजिए।
7. (a) A particle is projected with velocity u in a vertical plane so that its range is twice the greatest height attained. Find the range of the particle.
- (b) Find the moment of inertia of the area of mass M bounded by $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ about a line through the origin and perpendicular to its plane.

(अ) कोई कण u वेग से किसी ऊर्ध्वाधर समतल में इस प्रकार प्रक्षिप्त किया जाता है कि इसका परास इसकी अधिकतम ऊँचाई का दुगुना हो। कण का परास ज्ञात कीजिए।

(ब) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ से घिरे M द्रव्यमान के क्षेत्रफल का जड़त्व-आघूर्ण मूल-बिन्दु से जाने वाली तथा वक्र के तल के लम्बरेखा के परितः ज्ञात कीजिए।

8. (a) A hollow sphere is just filled with water of weight W . Find the vertical pressure on the upper half of the internal surface.

(b) A quadrilateral immersed vertically having two sides of length $2a$ and a parallel to the surface at depths h and $2h$ respectively. Find the depth of the centre of pressure.

(अ) एक खोखले गोले को W भार के जल से पूर्ण भरा गया है। इसकी आन्तरिक सतह के ऊपरी अर्द्धांश पर ऊर्ध्वाधर दाब ज्ञात कीजिए।

(ब) ऊर्ध्वाधर रूप से डुबोये गये एक चतुर्भुज की भुजायें जिनकी लम्बाइयाँ $2a$ और a हैं द्रव सतह के समान्तर क्रमशः h और $2h$ गहराई पर हैं। चतुर्भुज के दाब-केन्द्र की गहराई ज्ञात कीजिए।