

This question paper contains 8+2 printed pages]

HPAS (Main)—2012

MATHEMATICS

Paper—I

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 150

Note :— Attempt Five questions in all. Question No. 1 is compulsory. Four more questions are to be attempted out of the rest. All questions carry equal marks.

कुल पाँच प्रश्नों का उत्तर दीजिए। प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है। शेष में से चार प्रश्न और कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

1. (a) If A and B are subsets of X, then find the value of  $[A \cap (X \sim B)] \cup B$ .
- (b) Find a proper subgroup of the multiplicative group  $G = \{1, -1, i, -i\}$ .
- (c) Find  $A^{-1}$ , if :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

P.T.O.

(d) Show that if  $n$  is a positive integer, then :

$$\left( \frac{1 + \sin \phi + i \cos \phi}{1 + \sin \phi - i \cos \phi} \right)^n = \cos \left( \frac{n\pi}{2} - n\phi \right) - i \sin \left( \frac{n\pi}{2} - n\phi \right).$$

(e) Solve  $x^3 + 3x^2 + 4 = 0$ , two of its roots being equal.

(f) Find :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + x \right) \right]^{1/x}.$$

(अ) यदि  $A$  और  $B$  समुच्चय  $X$  के उपसमुच्चय हों, तो

$[A \cap (X \sim B)] \cup B$  का मान ज्ञात कीजिए।

(ब) मल्टिप्लिकेटिव ग्रुप  $G = \{1, -1, i, -i\}$  का प्रापर सबग्रुप

ज्ञात कीजिए।

(स)  $A^{-1}$  ज्ञात कीजिए, यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  है।

(द) यदि  $n$  एक धनात्मक पूर्णांक है, तो सिद्ध कीजिए :

$$\left( \frac{1 + \sin \phi + i \cos \phi}{1 + \sin \phi - i \cos \phi} \right)^n = \cos \left( \frac{n\pi}{2} - n\phi \right) - i \sin \left( \frac{n\pi}{2} - n\phi \right).$$

(य)  $x^3 + 3x^2 + 4 = 0$  को हल कीजिए, जबकि इसके दो मूल बराबर हैं।

(र)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + x \right) \right]^{1/x}$  का मान ज्ञात कीजिए।

2. (a) Use De-Moivre's theorem to solve the equation :

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0.$$

(b) Test the convergence of the series :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}.$$

- (c) Solve the following equation using matrix methods :

$$x + 2y - z = 3, \quad 3x - y + 2z = 1$$

$$2x - 2y + 3z = 2, \quad x - y + z = -1.$$

- (अ) डी-मोइवर प्रमेय का प्रयोग करते हुए समीकरण

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0 \text{ को हल कीजिए।}$$

- (ब) अनन्त श्रेणी  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$  को अभिसारी के लिए ज्ञात कीजिए।

- (स) आव्यूह के माध्यम से निम्न समीकरणों को हल कीजिए :

$$x + 2y - z = 3, \quad 3x - y + 2z = 1$$

$$2x - 2y + 3z = 2, \quad x - y + z = -1.$$

3. (a) Define ring with types of rings.
- (b) If  $x$  satisfies the equation  $x^2 - 2x \cos \theta + 1 = 0$ , then find the value of  $x^n + \frac{1}{x^n}$ .
- (c) Sum the series :

$$1 - 2 \cos \alpha + 3 \cos 2\alpha - 4 \cos 3 \alpha \dots \dots \dots \text{ to } n \text{ terms.}$$

(अ) रिंग को प्रकार सहित परिभाषित कीजिए।

(ब) यदि  $x$  समीकरण  $x^2 - 2x \cos \theta + 1 = 0$  को संतुष्ट करता है, तो  $x^n + \frac{1}{x^n}$  का मान ज्ञात कीजिए।

(स) श्रेणी  $1 - 2 \cos \alpha + 3 \cos 2\alpha - 4 \cos 3 \alpha \dots \dots \dots n$  पदों तक का योग ज्ञात कीजिए।

4. (a) State and prove the theorem of format.
- (b) If  $f$  is homomorphism of group  $G$  into a group  $G'$  with kernel  $k$ , then prove that  $k$  is a normal subgroup of  $G$ .

(c) If  $\sin(A + iB) = x + iy$ , then find the value of :

$$\frac{x^2}{\cosh^2 B} + \frac{y^2}{\sinh^2 B}$$

(अ) 'फारमेट' की प्रमेय को परिभाषित एवं सिद्ध कीजिए।

(ब) यदि फलन  $f$  ग्रुप  $G$  से ग्रुप  $G'$  में होमोमोरफिज्म है, जिसका कर्नल  $k$  है, तो सिद्ध कीजिए कि  $k$ ,  $G$  का एक नार्मल सबग्रुप है।

(स) यदि  $\sin(A + iB) = x + iy$ , तो  $\frac{x^2}{\cosh^2 B} + \frac{y^2}{\sinh^2 B}$

का मान ज्ञात कीजिए।

5. (a) A circle has radius 3 units and its centre lies on the line  $y = x - 1$ . Find the equation of the circle if it passes through (7, 3).

(b) Show that condition for the line  $lx + my + n = 0$  to be normal to a parabola  $y^2 = 4ax$  is

$$al^3 + 2alm^2 + m^2n = 0.$$

(c) Prove that the line  $y = x + 2$  touches the hyperbola  $5x^2 - 9y^2 = 45$ . Also find its points of contact.

(अ) एक वृत्त जिसकी त्रिज्या 3 यूनिट एवं केन्द्र रेखा  $y = x - 1$  में है। वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि वह (7, 3) बिन्दु से जाता हो।

(ब) सिद्ध कीजिए कि रेखा  $lx + my + n = 0$  परवलय  $y^2 = 4ax$  के लम्बवत् होगी, यदि  $al^3 + 2alm^2 + m^2n = 0$ .

(स) सिद्ध कीजिए कि रेखा  $y = x + 2$  अतिपरवलय  $5x^2 - 9y^2 = 45$  को स्पर्श करता है और इनके स्पर्श बिन्दु को भी ज्ञात कीजिए।

6. (a) Evaluate :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}.$$

(b) Find the greatest value of  $f(x) = (x + 1)^{1/3} - (x - 1)^{1/3}$  on  $[0, 1]$ .

(c) If  $f(x) = (x + 1) \tan^{-1}(e^{-2x})$ , then find  $f'(0)$ .

P.T.O.

(अ)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}$  का मान ज्ञात कीजिए।

(ब) फलन  $f(x) = (x+1)^{1/3} - (x-1)^{1/3}$  का  $[0, 1]$  पर अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

(स) यदि  $f(x) = (x+1) \tan^{-1}(e^{-2x})$  है, तो  $f'(0)$  का मान ज्ञात कीजिए।

7. (a) Evaluate :

$$\int \frac{1}{\sqrt{3} \sin x + \cos x} dx .$$

(b) Evaluate :

$$\int_{-1}^3 \left( \tan^{-1} \frac{x}{x^2 + 1} + \tan^{-1} \frac{x^2 + 1}{x} \right) dx .$$

(c) Find the length of the arc of the curve :

$$y = \log \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) \text{ from } x = 1 \text{ to } x = 2 .$$



(अ)  $\int \frac{1}{\sqrt{3} \sin x + \cos x} dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

(ब)  $\int_{-1}^3 \left( \tan^{-1} \frac{x}{x^2+1} + \tan^{-1} \frac{x^2+1}{x} \right) dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

(स) वक्र  $y = \log \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)$  के चाप की  $x = 1$  से  $x = 2$  तक की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

8. (a) Solve :

$$x^2 y dx - (x^3 + y^3) dy = 0.$$

(b) Solve :

$$p = \sin (y - xp)$$

Also find its singular solute.

(c) Using the method of variation of parameters,

solve :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = \tan 2x.$$

(अ) हल कीजिए :

$$x^2 y dx - (x^2 + y^2) dy = 0.$$

(ब)  $p = \sin (y - xp)$  को हल कीजिए और इसका सिंगुलर हल भी निकालिए।

(स) वेरियेशन पैरामीटर से  $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = \tan 2x$  को हल कीजिए।