

This question paper contains 8 printed pages]

HPAS (Main)—2012

MATHEMATICS

Paper II

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 150

Note :— Attempt Question Nos. 1 and 2 which are compulsory and any other three questions. All questions carry equal marks.

प्रश्न क्र. 1 तथा 2 अनिवार्य हैं । अन्य कोई तीन प्रश्न और कीजिये । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

1. (a) A particle moves along the curve :

$$x = t^3 + 1, y = t^2, z = 2t + 5$$

where t is the time. Find the components of its velocity and acceleration at time $t = 1$ in the direction :

$$\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$$

P.T.O.

(b) Prove that :

$$\operatorname{div} f = \operatorname{curl} \operatorname{curl} f + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

(अ) एक कण वक्र :

$$x = t^3 + 1, y = t^2, z = 2t + 5$$

जबकि t समय है, की ओर चलता है । इसके वेग और त्वरण के घटकों को $t = 1$ पर $\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ दिशा में ज्ञात कीजिये ।

(ब) सिद्ध कीजिये :

$$\operatorname{div} f = \operatorname{curl} \operatorname{curl} f + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

2. (a) State and prove Stokes' theorem.

(b) Prove that :

$$\operatorname{curl} (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a} \operatorname{div} \bar{b} - \bar{b} \operatorname{div} \bar{a} +$$

$$(\bar{b} \cdot \nabla) \bar{a} - (\bar{a} \cdot \nabla) \bar{b}$$

(अ) स्टोक्स प्रमेय को परिभाषित एवं सिद्ध कीजिये ।

(ब) सिद्ध कीजिये :

$$\text{curl} (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \text{ div } \vec{b} - \vec{b} \text{ div } \vec{a} +$$

$$(\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b}$$

3. (a) Let x, y be the sum of the components of a coplanar system of forces along two axes and G be the sum of the moments of the couple about origin, then find the resultant of the system of forces.

(b) Particles of weight 1 kg, 2 kg, 3 kg and 4 kg are placed at the angular points of a square of side a , then find the distance of their C.G. from the centre of the square.

(अ) यदि x, y एक समतलीय बलों के निकाय के दो अक्षों की दिशाओं में उनके घटकों के योग हों तथा G मूलबिन्दु के सापेक्ष उनके युग्म के आघूर्णों का योग हो, तो बलों के निकाय के परिणामी का समीकरण ज्ञात कीजिये ।

P.T.O.

(ब) 1 kg, 2 kg, 3 kg और 4 kg भार α भुजा के वर्ग के कोणीय बिन्दुओं पर रखे गये हैं, इनके गुरुत्व केन्द्र (C.G.) को वर्ग के केन्द्र से दूरी ज्ञात कीजिये।

4. (a) Show that the potential of a circle of uniform surface density and radius r at a point on its circumference is proportional to r .

(b) Three rods of uniform mass per unit length are joined to form a triangular frame. Find the resultant attraction at the centre.

(अ) सिद्ध कीजिए कि एकसमान पृष्ठ घनत्व तथा r त्रिज्या का इसकी परिधि पर स्थित किसी बिन्दु पर वृत्त का विभव r के प्रोपोशनल है।

(ब) एकसमान द्रव्यमान प्रति एकांक लम्बाई की तीन छड़ें इस प्रकार जोड़ी जाती हैं कि एक त्रिभुजाकार फ्रेम बन जाय। इस आकृति के केन्द्र पर परिणामी आकर्षण ज्ञात कीजिये।

5. (a) A particle is dropped under gravity from rest from a height h and it falls through a distance $\frac{9h}{25}$ in the last second, if $g = 9.8$ m/s², find the height h .

(b) Find the distance from the centre at which the velocity in a Simple Harmonic Motion (SHM) of amplitude a is half of the maximum.

(अ) h ऊँचाई से एक पिण्ड गुरुत्व के अधीन विराम अवस्था में छोड़ा जाता है, यदि यह अपने अन्तिम सेकेंड में $\frac{9h}{25}$ दूरी गिरता है, तथा $g = 9.8$ m/s² है, तो ऊँचाई h ज्ञात कीजिये ।

(ब) आयाम a की सरल आवर्त गति में, केन्द्र से उस बिन्दु की दूरी, जहाँ वेग अधिकतम का आधा है, ज्ञात कीजिये ।

6. (a) Find the moment of inertia of the hollow sphere of radius r about any diameter.

(b) If the length of the pendulum of a clock is increased in the ratio 900 : 901, then how much the clock would lose per day

(अ) r त्रिज्या के खोखले गोले का इसके किसी व्यास के परितः जड़त्व-आघूर्ण ज्ञात कीजिये ।

(ब) यदि किसी घड़ी के लोलक की लम्बाई 900 : 901 के अनुपात में बढ़ाई जाय तो घड़ी प्रतिदिन कितनी धीरे रहेगी ।

7. (a) Find the maximum range down the inclined plane, when a particle is projected at an angle α with velocity u down an inclined plane of inclination β with the horizon.

(b) If three forces, acting in one plane upon a rigid body kept in equilibrium, then show that they must meet in a point.

(अ) एक कण को u वेग से, क्षैतिज से α कोण पर एक आनत समतल, जिसका क्षैतिज से झुकाव β है, नीचे की ओर प्रक्षेपित किया जाता है, कण का अधिकतम क्षैतिज परास ज्ञात कीजिये ।

(ब) यदि एक दृढ़ पिण्ड पर, एक ही तल में लगे तीन बल, उसे सन्तुलन में रखते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि वे अनिवार्यतः एक बिन्दु पर मिलेंगे।

8. (a) A thin hollow cone with a base floats completely immersed in water wherever it is placed. Find the semi-vertical angle of the cone.

(b) The pressure at the centre of gravity of a triangular lamina wholly immersed in a homogenous liquid, is k times the pressure at the angular points. Find the value of k ?

(अ) एक आधार वाला एक पतला खोखला शंकु द्रव में जहाँ भी रखा जाता है, पूर्णतः डूबता हुआ तैरता है । इस शंकु के अर्द्ध शीर्ष कोण को ज्ञात कीजिये ।

(ब) एकसमान द्रव्य में पूर्णतः डूबाये हुए त्रिभुजाकार लेमिना के गुरुत्व केन्द्र पर दबाव इसके कोणीय बिन्दुओं पर कुल दबाव का k गुना है, तो k का मान ज्ञात कीजिये ।