

This question paper contains 16 printed pages]

H.P.A.S. (Main)—2013

MATHEMATICS

Paper I

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 150

Note :— Attempt Five questions in all. Question No. 1 is compulsory. Any four more questions are to be attempted out of the rest. All questions carry equal marks.

कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है । शेष में से चार प्रश्न और कीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

1. (a) Find A^{-1} of the following matrix A :

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

P.T.O.

- (b) Prove that every subset of a linearly independent set of vectors is linearly independent.
- (c) Prove that every point of intersection of the curve :

$$y = c \sin\left(\frac{x}{a}\right)$$

with x -axis is a point of inflexion.

- (d) Prove that :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}.$$

- (e) Find the general and singular solutions of the following equation :

$$xp^2 - 2yp + 4x = 0,$$

$$\text{where } p = \frac{dy}{dx}.$$

- (f) A point moves in a straight line with simple harmonic motion has velocities v_1 and v_2 when its distances from the centre be x_1 and x_2 . Show that the period of motion is :

$$2\pi \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{v_2^2 - v_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- (अ) निम्न आव्यूह का A^{-1} ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (ब) सिद्ध कीजिए कि रैखिक स्वतंत्र सदिशों के समुच्चय का प्रत्येक उपसमुच्चय रैखिक स्वतंत्र होता है ।

(स) सिद्ध कीजिए कि वक्र

$$y = c \sin\left(\frac{x}{a}\right)$$

का x -अक्ष के साथ प्रत्येक प्रतिच्छेद बिन्दु इसका नति परिवर्तन बिन्दु है ।

(द) सिद्ध कीजिए :

$$\nabla \times (\nabla \times a) = \nabla(\nabla \cdot a) - \nabla^2 a.$$

(य) निम्नलिखित अवकल समीकरण का व्यापक हल और

विचित्र हल ज्ञात कीजिए :

$$xp^2 - 2yp + 4x = 0,$$

जहाँ $p = \frac{dy}{dx}$.

- (र) सरल आवर्त गति में चलने वाले किसी कण (बिन्दु) के वेग, केन्द्र से x_1 तथा x_2 दूरी पर क्रमशः v_1 तथा v_2 हैं। सिद्ध कीजिए कि गति का आवर्तकाल है :

$$2\pi \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{v_2^2 - v_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

2. (a) Prove that λ is a characteristic root of a matrix A iff there exists a non-zero vector X such that :

$$AX = \lambda X.$$

- (b) If $V(\mathbb{R})$ be the vector space over the real number field \mathbb{R} of all 2×2 symmetric matrices and :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \right\}$$

be the basis of it, then find the coordinates of

$$\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -11 & -7 \end{pmatrix}$$

relative to the basis.

(c) Solve the following equations using matrix method :

$$x + y + z = 6$$

$$3x + 3y + z = 14$$

$$3x + y + 2z = 12.$$

(अ) सिद्ध कीजिए कि एक आव्यूह A का अभिलाक्षणिक मूल λ है, यदि केवल यदि एक अशून्य सदिश X का अस्तित्व इस प्रकार है कि :

$$AX = \lambda X.$$

(ब) यदि $V(\mathbb{R})$ वास्तविक क्षेत्र \mathbb{R} पर 2×2 सममित आव्यूह का सदिश समष्टि है तथा

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \right\}$$

इसका एक आधार है तो इस आधार के सापेक्ष

$$\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -11 & -7 \end{pmatrix} \text{ के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।}$$

(स) आव्यूह के माध्यम से निम्न समीकरणों को हल कीजिए :

$$x + y + z = 6$$

$$3x + 3y + z = 14$$

$$3x + y + 2z = 12.$$

3. (a) If

$$u = x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

then prove that :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(b) Trace the following curve :

$$x^2 y^2 = -(1 + y)^2 (y^2 - 4).$$

(c) Find the volume of the solid generated by the revolution of tractrix

$$x = a \cos t + \frac{a}{2} \log \tan^2 \frac{t}{2}, \quad y = a \sin t$$

about its asymptote.

(अ) यदि

$$u = x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

तो सिद्ध कीजिए कि :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(ब) निम्न वक्र का अनुरेखण कीजिए :

$$x^2 y^2 = -(1 + y)^2 (y^2 - 4).$$

(स) ट्रेक्ट्रिक्स

$$x = a \cos t + \frac{a}{2} \log \tan^2 \frac{t}{2}, \quad y = a \sin t$$

का अपने अनन्तस्पर्शी के सापेक्ष परिक्रमण से जनित ठोस

का आयतन ज्ञात कीजिए ।

4. (a) State and prove Bessel's inequality for finite dimensional spaces.

(b) If

$$f(x) = \sin x \text{ and } g(x) = \cos x,$$

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

then find the value of θ with the help of Cauchy's mean value theorem.

(c) Prove that :

$$\int_0^1 \log \Gamma(x) dx = \frac{1}{2} \log 2\pi.$$

(अ) परिमित विमीय क्षेत्रों पर आधारित बेसल की असमिका को परिभाषित और सिद्ध कीजिए ।

(ब) यदि

$$f(x) = \sin x \text{ और } g(x) = \cos x,$$

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

तो कौशी मध्यमान प्रमेय की सहायता से θ का मान ज्ञात कीजिए ।

(स) सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^1 \log \Gamma(x) dx = \frac{1}{2} \log 2\pi$$

5. (a) Show that the general equation of second degree in x, y always represents a conic.

(b) Reduce the equation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6yz - 2zx - 2xy -$$

$$6x - 2y - 2z + 2 = 0.$$

to canonical form and state the nature of the surface.

(c) Find the condition when the plane

$$ax + by + cz = 0$$

cuts the cone

$$yz + zx + xy = 0$$

in perpendicular lines.

(अ) सिद्ध कीजिए कि x, y में व्यापक द्विघात समीकरण सदैव एक शांकव को निरूपित करती है ।

(ब) समीकरण :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6yz - 2zx - 2xy -$$

$$6x - 2y - 2z + 2 = 0$$

का विहित रूप में समान्यन कीजिए तथा इसके द्वारा प्रदर्शित पृष्ठ की प्रकृति बताइये ।

(स) वह प्रतिबंध ज्ञात कीजिए जब समतल

$$ax + by + cz = 0$$

एक शंकु

$$yz + zx + xy = 0$$

को परस्पर लम्ब रेखाओं में काटता है ।

6. (a) Solve :

$$(D^4 + D^2 + 1)y = ax^2 + be^{-x} \sin 2x,$$

$$\text{where } D \equiv \frac{d}{dx}.$$

(b) Solve :

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} - (2x - 1) \frac{dy}{dx} + (x - 1) y = 0.$$

(c) State Bessel's differential equation and solve it in power series.

(अ) हल कीजिए :

$$(D^4 + D^2 + 1)y = ax^2 + be^{-x} \sin 2x,$$

$$\text{जहाँ } D \equiv \frac{d}{dx}.$$

(ब) हल कीजिए :

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} - (2x - 1) \frac{dy}{dx} + (x - 1) y = 0.$$

(स) बेसल की अवकल समीकरण को परिभाषित और इसे घात श्रेणी में हल कीजिए ।

7. (a) Evaluate :

$$\int_0^{\log 2} \int_0^x \int_0^{x+\log y} e^{x+y+z} dx dy dz.$$

(b) Prove that :

$$\text{grad}(a \cdot b) = (b \cdot \nabla) a + (a \cdot \nabla) b +$$

$$b \times \text{curl } a + a \times \text{curl } b.$$

(c) Verify Stokes' theorem for the function

$$F = zi + xj + yk$$

where C is the unit circle in the xy-plane bounding the hemisphere

$$z = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)}.$$

(अ) मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\log 2} \int_0^x \int_0^{x+\log y} e^{x+y+z} dx dy dz$$

(ब) सिद्ध कीजिए कि :

$$\text{grad}(a \cdot b) = (b \cdot \nabla) a + (a \cdot \nabla) b +$$

$$b \times \text{curl } a + a \times \text{curl } b.$$

(स) स्टोक्स प्रमेय की फलन

$$F = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$

के लिए सत्यापन कीजिए जहाँ C एक xy-समतल का इकाई वृत्त है जो

$$z = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)}.$$

गोलार्ध को परिवद्ध किए हुए है ।

8. (a) Five weightless rods of equal lengths are jointed together so as to form a rhombus ABCD with one diagonal BD. If a weight W be attached to C and the system be suspended from A, then find the thrust in BD.
- (b) A particle moves in a curve so that its tangential and normal accelerations are equal and the angular velocity of the tangent is constant. Find the curve.
- (c) A particle is moving vertically downwards from rest through a medium whose resistance varying as velocity. Discuss its motion.
- (अ) समान लम्बाई की पाँच भारहीन छड़ें परस्पर जोड़ी गई हैं ताकि एक विकर्ण BD सहित समचतुर्भुज ABCD बने । यदि C पर एक भार W बाँध दिया जाए और निकाय को A से लटकाया जाए, तो BD में प्रणोद ज्ञात कीजिए ।

P.T.O.

(ब) एक कण किसी वक्र में इस प्रकार चलता है कि इसके स्पर्शरिखीय एवं अभिलाम्बिक त्वरण सदैव समान रहते हैं और उसकी स्पर्शरिखा का कोणीय वेग अचर रहता है । वक्र ज्ञात कीजिए ।

(स) एक कण विरामावस्था से गुरुत्वाकर्षण के अधीन एक ऐसे माध्यम से होकर गिरता है जिसका प्रतिरोध उसके वेग के समानुपाती है । इसकी गति की विवेचना कीजिए ।