

This question paper contains 8+4 printed pages]

H.P.A.S. (Main)—2013

MATHEMATICS

Paper II

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 150

Note :— Attempt Five questions in all. Question No. 1 is compulsory. Attempt any other four questions from the rest. All questions carry equal marks. Use of scientific non-programmable calculator will be allowed for numerical analysis part.

कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है । शेष में से अन्य चार प्रश्न कोई से भी कीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं । संख्यात्मक विश्लेषण भाग के लिए अप्रोग्रामिक वैज्ञानिक कैलकुलेटर स्वीकार्य होगा ।

P.T.O.

1. (a) Let

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

be two permutations on 4 symbols, then find fog and gof .

(b) Examine the convergence of the integral :

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$$

(c) Prove that every convergence sequence is bounded.

(d) Form a partial differential equation by eliminating the function f from :

$$z = y^2 + 2f\left(\frac{1}{x} + \log y\right).$$

- (e) By using Newton-Raphson method, find the root of

$$x^4 - x - 10 = 0,$$

which is nearer to $x = 2$. Correct to three places of decimals.

- (f) Draw a flow chart to find the largest number from two numbers.

(अ) माना

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

दो क्रमचय 4 संकेतों पर हैं, तो fog तथा gof ज्ञात कीजिए ।

(ब) निम्न समाकल के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$$

(स) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिवर्द्ध होती है ।

(द) $z = y^2 + 2f\left(\frac{1}{x} + \log y\right)$ से फलन f का विलोपन कर आंशिक अवकल समीकरण बनाइए ।

(य) न्यूटन-रेफसन विधि से

$$x^4 - x - 10 = 0,$$

का $x = 2$ के समीप मूल तीन दशमलव स्थानों तक ज्ञात कीजिए ।

(र) दो संख्याओं में बड़ी संख्या ज्ञात करने के लिए प्रवाह संचित्र बनाइए ।

2. (a) Show that :

$$f : G \rightarrow G$$

defined by

$$f(x) = x^{-1} \quad \forall x \in G$$

is an automorphism iff G is abelian.

(b) Define normal subgroup. Suppose that H and K are two normal subgroups of a group G , then prove that HK is also a normal subgroup of G .

(अ) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह (ग्रुप) G में प्रतिचित्रण

$$f : G \rightarrow G, \quad f(x) = x^{-1} \quad \forall x \in G$$

एक स्वकारिता होगी यदि केवल यदि G क्रमविनिमेय

है ।

(ब) विशिष्ट उपसमूह को परिभाषित कीजिए । माना H और K किसी समूह G के दो विशिष्ट उपसमूह हैं तो सिद्ध कीजिए कि HK भी समूह G का एक विशिष्ट उपसमूह है ।

3. (a) State and prove the fundamental theorem of integral calculus.

(b) Find the upper and lower Riemann integrals of a function f in $[0, 2]$, where :

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 & (\text{when } x \text{ is rational number}) \\ x^2 + x^3 & (\text{when } x \text{ is irrational number}) \end{cases}$$

(अ) समाकलन गणित की मूल प्रमेय को परिभाषित और सिद्ध कीजिए ।

(ब) अन्तराल $[0, 2]$ में फलन f के निम्न और उपरि रीमान समाकल ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 & (\text{जबकि } x \text{ परिमेय संख्या है}) \\ x^2 + x^3 & (\text{जबकि } x \text{ अपरिमेय संख्या है}) \end{cases}$$

4. (a) Test the convergence of the following series :

$$1 + \frac{3}{7}x + \frac{3.6}{7.10}x^2 + \frac{3.6.9}{7.10.13}x^3 + \dots$$

(b) Define metric space and compact metric space.

Prove that every non-empty closed subset of a compact metric space is compact.

(अ) निम्न श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$1 + \frac{3}{7}x + \frac{3.6}{7.10}x^2 + \frac{3.6.9}{7.10.13}x^3 + \dots$$

(ब) दूरीक समष्टि और संहत समष्टि को परिभाषित कीजिए । सिद्ध कीजिए कि संहत दूरीक समष्टि का प्रत्येक अरिक्त संवृत उपसमुच्चय संहत होता है ।

5. (a) Define analytic function. State and prove Cauchy's integral formula.

(b) Define Bilinear transformation. Find a bilinear transformation that maps the points $z = 2, i, -2$ into $w = 1, i, -1$ respectively, where $i = \sqrt{-1}$.

(अ) विश्लेषिक फलन को परिभाषित कीजिए । कौशी समाकल सूत्र को परिभाषित और सिद्ध कीजिए ।

(ब) द्विरैखिक रूपान्तरण की परिभाषा दीजिए । एक द्विरैखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $z = 2, i, -2$ को क्रमशः $w = 1, i, -1$ में प्रतिचित्रित करे । जहाँ $i = \sqrt{-1}$ ।

6. (a) Solve :

$$px + qy = pq$$

(b) Solve :

$$pt - qs = q^3$$

(अ) हल कीजिए :

$$px + qy = pq$$

(ब) हल कीजिए :

$$pt - qs = q^3$$

7. (a) Use Laplace transform to evaluate :

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$$

(b) Find the extremal curve of the functional

$$I = \int_0^1 (1 + y'^2) dx,$$

given that :

$$y(0) = 0, y'(0) = 1, y(1) = 1, \text{ and } y'(1) = 1.$$

(अ) लाप्लास रूपांतरण द्वारा हल कीजिए :

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx.$$

(ब) फलनक

$$I = \int_0^1 (1 + y'^2) dx$$

का चरम वक्र ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि

$$y(0) = 0, y'(0) = 1, y(1) = 1, \text{ और } y'(1) = 1.$$

3. (a) Apply Gauss-Seidel iteration method to solve the following system of equations :

$$x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 18$$

$$-2x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 19$$

$$9x_1 - 2x_2 + x_3 = 50$$

- (b) Using Runge-Kutta method find an approximate value of y for $x = 0.2$ in step-size of 0.1, if

$$\frac{dy}{dx} = x + y^2,$$

given $y(0) = 1.$

- (अ) गॉस-सीडल पुनरावृत्ति विधि के प्रयोग द्वारा निम्न समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए :

$$x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 18$$

$$-2x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 19$$

$$9x_1 - 2x_2 + x_3 = 50$$

(ब) रूंगे-कुट्टा विधि का प्रयोग कर $x = 0.2$ पर y का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए, यदि

$$\frac{dy}{dx} = x + y^2,$$

जबकि $y(0) = 1$ एवं पद-लम्बाई 0.1 है ।