This question paper contains **16** printed pages]

HPAS (M)—2014

MATHEMATICS

Paper I

Time : 3 *Hours* *Maximum Marks* : 150

Note :— Attempt *Five* questions in all. Question No. **1** is compulsory. Any *four* more questions are to be attempted out of the rest. *All* questions carry equal marks.

कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न संख्या **1** अनिवार्य है। शेष में से **चार** प्रश्न और कीजिए। **सभी** प्रश्नों के अंक समान हैं।

1. (*a*) Find rank of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

P.T.O.

(*b*) Show that the set :

$$W = \{(a, b, c) : a - 3b + 4c = 0;\ a, b, c \in R\},$$

is a subspace of the vector space $V_3(R)$.

(*c*) Examine for continuity of the following function at $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - |x|}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Is it differentiable ?

(*d*) Find the surface represented by the equation :

$$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4yz + 2zx - 4xy$$

$$- 2x + 4y - 2z - 3 = 0 .$$

(*e*) Solve :

$$(D^4 + 2D^3 - 3D^2)y = x^3 + 2\sin x ,$$

where $D \equiv \dfrac{d}{dx}$.

(f) Two rods, each of length $2a$, have their ends united at an angle α, and are placed in a vertical plane on a sphere of radius r. Prove that the equilibrium is stable or unstable according as $\sin\alpha >$ or $< \frac{2r}{a}$.

(अ) आव्यूह :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

की कोटि ज्ञात कीजिए।

(ब) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय :

$$W = \{(a, b, c) : a - 3b + 4c = 0;\ a, b, c \in R\},$$

सदिश समष्टि $V_3(R)$ की एक उपसमष्टि है।

(स) निम्न फलन का $x = 0$ पर सांतत्य का परीक्षण कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - |x|}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

क्या यह अवकलनीय है ?

(द) समीकरण :

$$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4yz + 2zx - 4xy - 2x + 4y - 2z - 3 = 0$$

से प्रदर्शित पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

(य) हल कीजिए :

$$(D^4 + 2D^3 - 3D^2)y = x^3 + 2\sin x ,$$

जहाँ $D \equiv \frac{d}{dx}$.

(र) $2a$ लम्बाई की दो छड़ों के एक-एक सिरे α कोण पर जोड़ दिए गए हैं और उनको ऊर्ध्वाधर समतल में r त्रिज्या वाले चिकने गोले पर रख दिया गया है। सिद्ध कीजिए कि सन्तुलन स्थायी या अस्थायी होगा, जबकि $\sin\alpha >$ या $< \frac{2r}{a}$.

2. (*a*) Find the characteristic roots and characteristic vectors of the following matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

(*b*) Solve the following equations using matrix method :

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8.$$

(*c*) Prove that the mapping :

$$t : V_2(R) \rightarrow V_3(R),$$

which is defined by $t(x, y) = (x, y, 0)$ is a linear transformation from vector space $V_2(R)$ to the vector space $V_3(R)$.

(अ) निम्न आव्यूह के अभिलाक्षंणिक मूल और अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

(ब) आव्यूह के माध्यम से निम्न समीकरणों को हल कीजिए :

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8\,.$$

(स) सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण :

$$t : \mathrm{V}_2(\mathrm{R}) \rightarrow \mathrm{V}_3(\mathrm{R}),$$

जो $t(x, y) = (x, y, 0)$ से परिभाषित है, सदिश समष्टि $\mathrm{V}_2(\mathrm{R})$ से सदिश समष्टि $\mathrm{V}_3(\mathrm{R})$ पर एक रैखिक रूपान्तरण है।

3. (*a*) Given the sum of the perimeters of a square and a circle, show that the sum of their areas is least when the side of the square is equal to the diameter of the circle.

(*b*) Fully examine the nature of the origin on the curve :

$$x^2(x^2 - 4a^2) = y^2(x^2 - a^2)$$

and trace the curve.

(*c*) Find the area of surface of a cone whose semi-vertical angle is α and the base is a circle of radius r.

(अ) एक वर्ग की परिमाप तथा वृत्त की परिधि का योग दिया है। सिद्ध कीजिए कि उनके क्षेत्रफलों का योग न्यूनतम होगा जबकि वर्ग की भुजा वृत्त के व्यास के बराबर है।

P.T.O.

(ब) वक्र

$$x^2(x^2 - 4a^2) = y^2(x^2 - a^2)$$

पर मूल बिन्दु की प्रकृति का परीक्षण कीजिए तथा वक्र का अनुरेखण कीजिए।

(स) उस शंकु के पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका अर्द्ध शीर्ष कोण α तथा आधार एक r त्रिज्या वाला वृत्त है।

4. (*a*) **Evaluate :**

$$\iint_A (xy)(x+y)\,dxdy$$

where region A is the area between the parabola $y = x^2$ **and the line** $y = x$.

(*b*) **If**

$$u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x - y}\right),$$

then prove that :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u\ .$$

(c) Prove that the limit of used in Lagrange's mean value theorem tends to $\frac{1}{2}$ when $h \to 0$, provided $f''(x)$ is continuous and $f''(x) \neq 0$.

(अ) मान ज्ञात कीजिए :

$$\iint_A (xy)(x+y)\,dxdy$$

जहाँ क्षेत्र A, परवलय $y = x^2$ तथा रेखा $y = x$ के मध्य का क्षेत्र है।

(ब) यदि

$$u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x - y}\right),$$

तब सिद्ध कीजिए कि

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u .$$

(स) सिद्ध कीजिए कि लाग्रांज माध्यमान प्रमेय में प्रयुक्त की सीमा $\frac{1}{2}$ को प्रवृत होती है जब, $h \to 0$, जबकि $f''(x)$ संतत है तथा $f''(x) \neq 0$.

5. (*a*) Find the equation of the sphere which passes through the points :

(1, 0, 0); (0, 1, 0) and (0, 0, 1),

and has its radius as small as possible.

(*b*) What conic does equation :

$$13x^2 - 18xy + 37y^2 + 2x + 14y - 2 = 0$$

represent ? Find its centre and the equation to the conic referred to the centre as origin.

(*c*) Find length and the equations to the shortest distance between the following lines :

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1} \text{ and } \frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}.$$

(अ) बिन्दु

(1, 0, 0); (0, 1, 0) और (0, 0, 1)

से गुजरने वाले उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या न्यूनतम हो।

(ब) समीकरण :

$$13x^2 - 18xy + 37y^2 + 2x + 14y - 2 = 0$$

कौनसे शांकव को निरूपित करता है ? इसके केन्द्र के निर्देशांक तथा इसके केन्द्र को मूल बिन्दु मान कर शांकव का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(स) निम्न रेखाओं के बीच की दूरी की लम्बाई और समीकरण ज्ञात कीजिए :

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1} \quad \text{और} \quad \frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}.$$

6. (*a*) Discuss the solutions of the following equation :

$$x^3p^2 + x^2yp + a^3 = 0,$$

where $p \equiv \frac{d}{dx}$.

(*b*) Solve by the method of variation of parameters :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = x^2e^x.$$

(c) For Bessel function, prove that :

$$x\, J_n'(x) = n\, J_n(x) - x\, J_{n+1}(x) .$$

(अ) निम्न समीकरण के हलों की विवेचना कीजिए :

$$x^3 p^2 + x^2 yp + a^3 = 0 ,$$

जहाँ $p \equiv \frac{d}{dx}$.

(ब) प्राचल विचरण विधि द्वारा हल कीजिए :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = x^2 e^x .$$

(स) बेसल फलन के लिए सिद्ध कीजिए कि :

$$x\, J_n'(x) = n\, J_n(x) - x\, J_{n+1}(x) .$$

7. (a) For Beta function, prove that :

$$B(m, n) = B(m+1, n) + B(m, n+1) .$$

(*b*) If

$a = \sin\theta i + \cos\theta j + \theta k, \quad b = \cos\theta i - \sin\theta j - 3k$

and $c = 2i + 3j - k$,

then evaluate $\frac{d}{d\theta}[a \times (b \times c)]$ for $\theta = 0$.

(*c*) Apply Gauss theorem to evaluate :

$$\int_s \{(x^3 - yz)dydz - 2x^2y\, dzdx + zdxdy\}$$

over the surface of a cube bounded by the coordinate planes and the planes $x = y = z = a$.

(अ) बीटा फलन के लिए सिद्ध कीजिए कि :

$$B(m, n) = B(m+1, n) + B(m, n+1).$$

(ब) यदि

$a = \sin\theta i + \cos\theta j + \theta k, \quad b = \cos\theta i - \sin\theta j - 3k$

और $c = 2i + 3j - k$,

तब $\frac{d}{d\theta}[a \times (b \times c)]$ का $\theta = 0$ पर मान ज्ञात कीजिए।

(स) गॉस प्रमेय द्वारा :

$$\int_s \{(x^3 - yz)dydz - 2x^2y\, dzdx + zdxdy\},$$

का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ s एक घन जो कि निर्देशी–समतलों तथा $x = y = z = a$ तलों से घिरा हुआ है।

8. (*a*) The moments of a given system of coplanar forces about three points :

(2, 0), (0, 2) and (2, 2)

in their plane are 3, 4 and 10 units respectively. Find the magnitude of the resultant force and the equation of its line of action.

(*b*) A particle moves with simple harmonic motion in a straight line. If in the first second after starting from rest it travels a distance a and in the next second it travels a distance b in the same direction, then find the amplitude and period of the motion.

(c) A particle of mass m is falling under gravity through a medium whose resistance is μ times the velocity. If the particle is released from rest, show that the distance fallen through in time t is :

$$\frac{gm^2}{\mu^2}\left(e^{-\frac{\mu t}{m}} - 1 + \frac{\mu t}{m}\right).$$

(अ) किसी दिए गए समतलीय बल निकाय के बिन्दुओं :

(2, 0), (0, 2) और (2, 2)

के सापेक्ष आघूर्ण क्रमश: 3, 4 और 10 इकाई हैं। परिणामी बल का परिमाण और क्रिया रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(ब) एक कण सरल रेखा में सरल आवर्त गति में गतिमान है। यदि विराम अवस्था से गति प्रारम्भ होने के प्रथम सेकण्ड में a दूरी तथा अगले सेकण्ड में b दूरी उसी दिशा में तय करता है तो गति का आयाम तथा आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।

(स) m संहति का एक कण गुरुत्वाकर्षण के अधीन एक ऐसे माध्यम में होकर गिर रहा है जिसका प्रतिरोध वेग का μ गुना है। यदि कण विरामावस्था से डाला जाए तो सिद्ध कीजिए कि t समय में गिरी हुई दूरी होगी :

$$\frac{gm^2}{\mu^2}\left(e^{-\frac{\mu t}{m}} - 1 + \frac{\mu t}{m}\right).$$