This question paper contains 8+4 printed pages]

HPAS (M)—2014

MATHEMATICS

Paper II

Time : 3 *Hours* *Maximum Marks* : 150

Note :— Attempt *Five* questions in all. Question No. 1 is compulsory. Attempt any other *four* questions from the rest. *All* questions carry equal marks. Use of scientific non-programmable calculator will be allowed for numerical analysis part.

कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है। शेष में से अन्य कोई से भी **चार** प्रश्न कीजिए। **सभी** प्रश्नों के अंक समान हैं। संख्यात्मक विश्लेषण भाग के लिए अप्रोग्रामिक वैज्ञानिक कैलकुलेटर स्वीकार्य होगा।

1. (*a*) If

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

is a permutation on five symbols, then find A^3 and order of A.

(*b*) Test the convergence of the integral :

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx .$$

(*c*) Prove that every Cauchy sequence is bounded.

(*d*) Prove that the set of real numbers R and the function defined as follows :

$$d : d(x, y) = |x - y| \ \forall\ x, y \in \mathrm{R}$$

form a metric space.

(*e*) Solve the following partial differential equation :

$$p^2 + q^2 - 2px - 2qy + 1 = 0 .$$

(*f*) Draw a flow chart to print all even numbers between 1 and 50.

(अ) यदि

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

एक क्रमचय पाँच संकेतों पर है, तो A^3 तथा A की कोटि ज्ञात कीजिए।

(ब) निम्न समाकल के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

(स) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक कौशी अनुक्रम परिबद्ध होती है।

(द) सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R तथा निम्न प्रकार से परिभाषित फलन :

$$d : d(x, y) = |x - y| \; \forall \; x, y \in \mathrm{R}$$

मिलकर एक दूरीक समष्टि बनाते हैं।

(य) निम्न आंशिक अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$p^2 + q^2 - 2px - 2qy + 1 = 0$$

(र) 1 और 50 के बीच की सभी सम संख्याओं को ज्ञात करने का प्रवाह-संचित्र बनाइए।

2. (*a*) State and prove Cayley's Theorem.

(*b*) Let I be the additive group of Integers. Let H be the subgroup of I such that :

$$H = \{mx : x \in I\},$$

where m is a fixed integer. Write the element of the quotient group $\frac{I}{H}$. Also prepare a composition table for $\frac{I}{H}$ when $m = 5$.

(अ) कैले की प्रमेय को परिभाषित और सिद्ध कीजिए।

(ब) माना पूर्णांक I, योग संक्रिया के लिए ग्रुप (समूह) है तथा H, I का एक उपसमूह है जहाँ :

$$H = \{mx : x \in I\},$$

जहाँ m एक अचर पूर्णांक है। खण्ड समूह $\frac{I}{H}$ के अवयव बताइए। $\frac{I}{H}$, जहाँ $m = 5$, के लिए संक्रिया तालिका बनाइए।

3. (*a*) Let f be bounded on $[a, b]$. Then prove that f is R-integrable over $[a, b]$ iff given $\in > 0$ there exists a partition P of $[a, b]$ such that :

$$0 \leq U(f, P) - L(f, P) < \in .$$

(*b*) For the functions :

$$f(x) = x, \quad g(x) = e^x,$$

then verify the second mean value theorem in the interval [–1, 1].

(अ) यदि फलन f अन्तराल $[a, b]$ पर परिबद्ध है तो सिद्ध कीजिए कि फलन f तभी और केवल तभी R-समाकलनीय है जबकि प्रत्येक $\in > 0$ के लिए अन्तराल $[a, b]$ का ऐसा कोई विभाजन P विद्यमान हो कि :

$$0 \leq U(f, P) - L(f, P) < \in .$$

(ब) फलनों :

$$f(x) = x, \quad g(x) = e^x,$$

के लिए अन्तराल [–1, 1] में द्वितीय माध्यमान प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

4. (*a*) Find whether the following series is convergent or divergent :

$$x^2 + \frac{2^2.x^4}{3.4} + \frac{2^2.4^2}{3.4.5.6}.x^6 + \frac{2^2.4^2.6^2}{3.4.5.6.7.8}.x^8 + ...$$

(*b*) Prove that the metric space (R, d) is complete, where d is the usual metric for the set of real numbers R.

(अ) ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित श्रेणी अभिसारी है या अपसारी :

$$x^2 + \frac{2^2.x^4}{3.4} + \frac{2^2.4^2}{3.4.5.6}.x^6 + \frac{2^2.4^2.6^2}{3.4.5.6.7.8}.x^8 + ...$$

(ब) सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R के लिए यदि d साधारण (सामान्य) दूरीक है तो दूरीक समष्टि (R, d) एक पूर्ण समष्टि है।

5. (a) If $f(z) = u + iv$ is an analytic function of $z = x + iy$ and

$$u - v = e^x (\cos y - \sin y),$$

find $f(z)$ in terms of z.

(b) If $w = f(z)$ represents a conformal transformation of a domain D in the z-plane into a domain D' of the w-plane, then prove that $f(z)$ is an analytic function of z in D.

(अ) यदि $f(z) = u + iv$, $z = x + iy$ का एक विश्लेषिक फलन है और

$$u - v = e^x (\cos y - \sin y),$$

$f(z)$ को z के पदों में ज्ञात कीजिए।

(ब) यदि $w = f(z)$ प्रदेश D का z-समतल में एक अनुकोण रूपान्तरण w-समतल के प्रदेश D' में है, तब सिद्ध कीजिए कि $f(z)$, z का विश्लेषिक फलन D में है।

6. (*a*) **Solve :**

$$pxy + pq + qy = yz.$$

(*b*) **Solve by Monge's method :**

$$pq = x(ps - qr).$$

(अ) हल कीजिए :

$$pxy + pq + qy = yz.$$

(ब) मोंजे की विधि से हल कीजिए :

$$pq = x(ps - qr).$$

7. (a) If

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} \cdot x^n),$$

then find Laplace transform $L\{L_n(x); p\}, p > 1$.

(b) Find the extremal curve of the functional :

$$I[y(x), z(x)] = \int_0^{\pi/2} \{(y')^2 + (z')^2 + 2yz\}\, dx,$$

given that :

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1; \quad z(0) = 0, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

(अ) यदि

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} \cdot x^n),$$

तब लाप्लास रूपांतरण $L\{L_n(x); p\}, p > 1$ ज्ञात कीजिए।

(ब) फलनक :

$$I[y(x), z(x)] = \int_0^{\pi/2} \{(y')^2 + (z')^2 + 2yz\}\, dx,$$

का चरम वक्र ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि :

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1; \quad z(0) = 0, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

8. (*a*) Find the roots of the quadratic equation :

$$x^2 - 5x + 2 = 0,$$

correct to four decimal places by the Newton-Raphson method.

(*b*) Evaluate :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

using Simpson's $\frac{1}{3}$ and $\frac{3}{8}$ rule. Hence obtain the approximate value of π in each case.

(अ) न्यूटन–रेफसन विधि द्वारा द्विघात समीकरण :

$$x^2 - 5x + 2 = 0$$

के मूल दशमलव के चार स्थानों तक ज्ञात कीजिए।

(ब) सिम्पसन के $\frac{1}{3}$ तथा $\frac{3}{8}$ नियमों के उपयोग द्वारा

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

का मूल्यांकन कीजिए। फलतः प्रत्येक स्थिति में π का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।