This question paper contains 15 printed pages]

HPAS (M)—2015

MATHEMATICS

Paper I

Time : 3 Hours *Maximum Marks :* 150

Note :— Attempt *Five* questions in all. Question No. **1** is compulsory. Attempt any other *four* questions from the rest. *All* questions carry equal marks.

कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न संख्या **1** अनिवार्य है । शेष में से अन्य कोई से भी **चार** प्रश्न कीजिए । **सभी** प्रश्नों के अंक समान हैं ।

1. (*a*) Find characteristic equation and roots of the following matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

P.T.O.

(*b*) Prove that the set $S = \{(1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, -1, 2)\}$ forms a basis of vector space $V_3(R)$.

(*c*) If $f(x) = \sin x$ and $g(x) = \cos x, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, then find the value of θ with the help of Cauchy's mean value theorem.

(*d*) Solve :

$$(D^3 - 7D - 6)y = e^{2x}(1 + x)$$

where $D \equiv \frac{d}{dx}$.

(*e*) If :

$$u = x + y + z, v = x^2 + y^2 + z^2 \text{ and } w = xy + yz + zx,$$

then find :

$$(\text{grad } u) . \{(\text{grad } v) \times (\text{grad } w)\}, \text{ where grad} \equiv \nabla .$$

(f) Forces 13, 10 and 5 kg weight act along the sides BC, CA and AB of an equilateral triangle ABC. Find the direction and the magnitude of their resultant.

(अ) निम्न आव्यूह के अभिलाक्षणिक समीकरण और मूल ज्ञात कीजिये :

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

(ब) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय :

$$S = \{(1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, -1, 2)\}$$

सदिश समष्टि $V_3(R)$ का एक आधार है ।

(स) यदि

$$f(x) = \sin x \text{ और } g(x) = \cos x, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

तो कॉशी मध्यमान प्रमेय की सहायता से θ का मान ज्ञात कीजिए।

(द) हल कीजिए :

$$(D^3 - 7D - 6)y = e^{2x}(1 + x)$$

जहाँ $D \equiv \dfrac{d}{dx}$.

(य) यदि

$u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2$ तथा $w = xy + yz + zx$

तब ज्ञात कीजिए :

(grad u) . {(grad v) × (grad w)}, जहाँ grad (प्रवणता) $\equiv \nabla$.

(र) एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और AB के अनुदिश 13, 10 और 5 किग्रा. भार के बल क्रियाशील हैं । परिणामी का परिमाण एवं दिशा ज्ञात कीजिए ।

2. (a) Apply matrix theory to solve the following system of equations :

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

(b) Prove that the mapping $f : V_1(R) \to V_2(R)$ defined by :

$$f(u_1, u_2, u_3) = (u_1 - u_2, u_1 - u_3)$$

is a linear transformation.

(c) State and prove Cauchy-Schwarz inequality.

(अ) आव्यूह विधि के माध्यम से निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

(ब) सिद्ध कीजिए कि $V_1(R)$ का $V_2(R)$ पर प्रतिचित्रण

$f : V_1(R) \rightarrow V_2(R)$ जो कि :

$$f(u_1, u_2, u_3) = (u_1 - u_2, u_1 - u_3)$$

द्वारा परिभाषित है एक रैखिक रूपान्तरण होगा ।

(स) कॉशी–श्वार्ज असमिका का कथन लिखिए और इसे सिद्ध कीजिए ।

3. (*a*) Evaluate :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right)$$

(*b*) Prove that the radius of curvature at any point (x, y) on the Astroid :

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

is three times the length of the perpendicular from the origin on the tangent at that point.

(c) If :

$$u = x\,\phi(y/x) + \psi(y/x),$$

then prove that :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(अ) हल कीजिए :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right)$$

(ब) सिद्ध कीजिए कि एस्ट्रायड :

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

के किसी भी बिन्दु (x, y) पर वक्रता-त्रिज्या मूल बिन्दु से स्पर्शरिखा पर खींचे लम्ब की लम्बाई की तीन गुना होती है ।

(स) यदि :

$$u = x\,\phi(y/x) + \psi(y/x),$$

सिद्ध कीजिए :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

4. (a) If :

$$u^3 + v^3 = x + y \text{ and } u^2 + v^2 = x^3 + y^3,$$

then find the value of :

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

(b) Evaluate :

$$\iiint_V 2z \, dxdydz$$

where region of integration V is a cone enclosed by the following surface :

$$x^2 + y^2 = z^2, z = 1$$

(c) Prove that a rectangular solid of maximum volume within a sphere is a cube.

(अ) यदि $u^3 + v^3 = x + y$ तथा $u^2 + v^2 = x^3 + y^3$, तो :

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

का मान ज्ञात कीजिए ।

(ब) मान ज्ञात कीजिए :

$$\iiint_V 2z \, dxdydz$$

जहाँ समाकलन का क्षेत्र V एक शंकु है, जो निम्न पृष्ठों से घिरा हुआ है :

$$x^2 + y^2 = z^2, z = 1$$

(स) सिद्ध कीजिए कि एक गोले के अंतर्गत अधिकतम आयतन वाला आयताकार ठोस एक घन होता है ।

5. (*a*) Reduce the equation :

$$11y^2 + 14yz + 8zx + 14xy - 6x - 16y + 2z - 2 = 0$$

to canonical form and state the nature of the surface.

(*b*) Find the equation of the sphere having the circle :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 10y - 4z = 8, x + y + z = 3$$

as a great circle.

(c) Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the line :

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$$

and whose guiding curve is the ellipse :

$$x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$$

(अ) समीकरण :

$$11y^2 + 14yz + 8zx + 14xy - 6x - 16y + 2z - 2 = 0$$

का विहित रूप में समानयन कीजिए तथा इसके द्वारा प्रदर्शित पृष्ठ बताइये ।

(ब) गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका वृत्त :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 10y - 4z = 8, x + y + z = 3$$

एक वृहत् वृत्त हो ।

(स) उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी जनक रेखाएँ :

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$$

के समान्तर हैं तथा जिसका निर्देशक वक्र :

$$x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$$

है ।

6. (a) Discuss the solutions of the following equation :

$$p^2(2 - 3y)^2 = 4(1 - y)$$

(b) Solve :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - (x^2 + 2x)\frac{dy}{dx} + (x + 2)y = x^3 e^x$$

(c) For Bessel function, prove that :

$$2n\, J_n(x) = x\,[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]$$

(अ) निम्न समीकरण के हलों की विवेचना कीजिए :

$$p^2(2 - 3y)^2 = 4(1 - y)$$

(ब) हल कीजिए :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - (x^2 + 2x)\frac{dy}{dx} + (x+2)y = x^3 e^x$$

(स) बेसल फलन के लिए सिद्ध कीजिए कि :

$$2n\, J_n(x) = x\,[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]$$

7. (*a*) If f and g are two scalar point functions, prove that :

$$\text{div}\,(f \nabla g) = f\, \nabla^2 g + \nabla f \,.\, \nabla g$$

(*b*) Prove that :

$$\nabla \times (\nabla \times a) = \nabla(\nabla \,.\, a) - \nabla^2 a$$

(*c*) Evaluate by Green's theorem :

$$\int_C [(\cos x \sin y - xy)\, dx + \sin x \cos y\, dy]$$

where C is the circle $x^2 + y^2 = 1$

(अ) यदि f तथा g दो अदिश बिन्दु फलन हैं, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\text{div}\,(f\,\nabla g) = f\,\nabla^2 g + \nabla f\,.\,\nabla g$$

(ब) सिद्ध कीजिए कि :

$$\nabla \times (\nabla \times a) = \nabla(\nabla\,.\,a) - \nabla^2 a$$

(स) ग्रीन प्रमेय द्वारा निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_C [(\cos x \sin y - xy)\,dx + \sin x \cos y\,dy]$$

जहाँ C वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ है ।

8. (*a*) Six equal heavy rods, freely hinged at their ends form a regular hexagon ABCDEF which when hung-up by the point A is kept from altering its shape by two light rods BF and CE. Find the thrusts of these rods.

(b) A particle is moving vertically downwards from rest through a medium whose resistance varying as velocity, discuss its motion.

(c) The greatest and least velocities of a certain planet in its orbit round the sun are 30 and 29.2 km/sec. Find the eccentricity of the orbit.

(अ) छः समान भारी छड़ें स्वतंत्रतापूर्वक सिरों पर जुड़ी हुई हैं और एक समषट्भुज ABCDEF बनाती हैं । इसे A बिन्दु द्वारा लटकाया जाता है और दो भारहीन छड़ों BF तथा CE द्वारा इस आकृति को अपरिवर्तित रखा जाता है । इन छड़ों में प्रणोद ज्ञात कीजिये ।

(ब) एक कण विरामावस्था से गुरुत्वाकर्षण के अधीन एक ऐसे माध्यम से होकर गिरता है जिसका प्रतिरोध उसके वेग के समानुपाती है । इसकी गति की विवेचना कीजिए ।

(स) किसी ग्रह का सूर्य के चारों ओर अपनी सकेन्द्र कक्षा में अधिकतम एवं न्यूनतम वेग क्रमशः 30 और 29.2 किमी/सेकण्ड है । सकेन्द्र कक्षा की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए ।