This question paper contains 8+3 printed pages]

HPAS (M)—2015

MATHEMATICS

Paper II

Time : 3 Hours *Maximum Marks* : 150

Note :— Attempt *Five* questions in all. Question No. **1** is compulsory. Any *four* more questions are to be attempted out of the rest. *All* questions carry equal marks. Use of scientific non-programmable calculator will be allowed for numerical analysis part.

कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न संख्या **1** अनिवार्य है । शेष में से अन्य **चार** प्रश्न कोई से भी कीजिए । **सभी** प्रश्नों के अंक समान हैं । संख्यात्मक विश्लेषण भाग के लिए अप्रोग्रामिक वैज्ञानिक कैलकुलेटर स्वीकार्य होगा ।

1. (*a*) Show that the set :

$$G = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

is a finite group of order 5 with respect to addition modulo 5.

(*b*) Prove that the sequence $\{x_n\}$, where :

$$x_n = \frac{2n - 7}{3n + 2}, \forall n \in N$$

is bounded monotonically increasing and convergent.

(*c*) Prove that in a metric space every open sphere is an open set.

(*d*) Form a partial differential equation by eliminating the functions from the equation :

$$Z = f(x + iy) + \phi (x - iy), \text{ where } i = \sqrt{(-1)}$$

(e) Using method of false position, find the real root of the equation :

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

(f) Draw a flow chart to find the largest number from two numbers.

(अ) प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय :

$$G = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

योग समशेष मॉड 5 के लिए एक परिमित ग्रुप (समूह) है जिसका समूहांक 5 है ।

(ब) सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{x_n\}$, जहाँ :

$$x_n = \frac{2n - 7}{3n + 2}; \forall n \in N$$

परिबद्ध, एकदिष्ट वर्धमान तथा अभिसारी है ।

(स) सिद्ध कीजिए कि किसी भी दूरीक समष्टि में, प्रत्येक विवृत गोलक एक विवृत समुच्चय होता है ।

(द) समीकरण :

$$Z = f(x + iy) + \phi\,(x - iy), \quad \text{जहाँ} \quad i = \sqrt{(-1)}$$

से फलनों का विलोपन कर आंशिक अवकल समीकरण बनाइए ।

(य) मिथ्या स्थिति विधि द्वारा समीकरण :

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

का वास्तविक मूल ज्ञात कीजिए ।

(र) दो संख्याओं में बड़ी संख्या ज्ञात करने के लिए प्रवाह संचित्र बनाइए ।

2. (a) Prove that the order of an element of a group is always equal to the order of its inverse.

(b) Prove that every homomorphic image of group G is isomorphic to some quotient group of G.

(अ) ग्रुप (समूह) में किसी अवयव की कोटि सदैव उसके प्रतिलोम की कोटि के समान होती है, सिद्ध कीजिए।

(ब) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G का प्रत्येक समाकृतिक प्रतिबिम्ब किसी अवशेष वर्ग समूह के तुल्यकारी होता है ।

3. (a) State and prove Darboux theorem.

(b) If function :

$$f(x) = \sin x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ and } P = \left\{0, \frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \ldots, \frac{n\pi}{2n}\right\}$$

is the partition of $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, then prove that $f \in R\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Also find $L(f, P)$, $U(f, P)$:

$\sup.\{L(f,P)\}$ and $\operatorname{Inf.}\{U(f,P)\}$.

(अ) डार्बू प्रमेय का कथन लिखिए और इसे सिद्ध कीजिए ।

(ब) यदि :

$$f(x) = \sin x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ तथा } P = \left\{0, \frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \ldots, \frac{n\pi}{2n}\right\}$$

अन्तराल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ का विभाजन है, तब सिद्ध कीजिए कि :

$f \in R\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ साथ ही $L(f, p)$, $U(f, P)$

उच्चक $\{L(f, P)\}$ तथा निम्नक $\{U(f, P)\}$ ज्ञात कीजिए।

4. (a) Find whether the following series is convergent or divergent :

$$x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$$

(b) Let f and g be complex continuous functions on a metric space (A, d) then $f + g$, fg and αf are continuous on (A, d). Prove it. In the last case α is real or complex.

(अ) ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित श्रेणी अभिसारी है या अपसारी है :

$$x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + ...$$

(ब) मान लीजिए f तथा g किसी दूरीक समष्टि (A, d) पर परिभाषित सम्मिश्र संतत फलन हैं । तब सिद्ध कीजिए कि $f + g$, fg तथा αf (A, d) पर संतत होते हैं । अन्तिम स्थिति में α वास्तविक अथवा सम्मिश्र संख्या है ।

5. (a) Verify Cauchy's theorem for the function $5 \sin 2z$ if C is the square with vertices $1 \pm i$ and $-1 \pm i$, where $i = \sqrt{(-1)}$ and C : closed contour.

(b) Show that the transformation :

$$w = \frac{2z + 3}{z - 4}$$

maps the circle :

$$x^2 + y^2 - 4x = 0$$

into the straight line $4u + 3 = 0$.

(अ) फलन 5 sin $2z$ के लिए कॉशी प्रमेय का सत्यापन कीजिए। यदि C एक वर्ग है जिसके शीर्ष $1 \pm i$ तथा $-1 \pm i$ हैं । जहाँ $i = \sqrt{(-1)}$ है तथा C संवृत कंटूर ।

(ब) सिद्ध कीजिए कि रूपान्तरण :

$$w = \frac{2z + 3}{z - 4} \quad \text{वृत्त} \quad x^2 + y^2 - 4x = 0$$

को सरल रेखा $4u + 3 = 0$ पर प्रतिचित्रित करता है ।

6. (*a*) Solve :

$$(y + z)\, p + (z + x) q = (x + y) .$$

(*b*) Solve :

$$r + s - 6t = y \cos x .$$

(अ) हल कीजिए :

$$(y + z)\, p + (z + x) q = (x + y)$$

(ब) हल कीजिए :

$$r + s - 6t = y \cos x$$

7. (*a*) Find the Laplace transform of $\sin\sqrt{t}$. Also show that :

$$L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{p}\right)} \cdot e^{-\frac{1}{4p}}$$

(*b*) Find the extremum curve for the functional :

$$I[y(x)] = \int_0^{x_2} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{y}}\, dx$$

given that :

$$y(0) = 0 \text{ and } y_2 = x_2 + 5.$$

(अ) $\sin\sqrt{t}$ का लाप्लास रूपांतरण ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि :

$$L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{p}\right)} \cdot e^{-\frac{1}{4p}}$$

(ब) फलनक :

$$I[y(x)] = \int_0^{x_2} \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}\, dx$$

का चरम वक्र ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि :

$$y(0) = 0 \text{ तथा } y_2 = x_2 + 5$$

8. (a) Find the polynomial of the lowest possible degree which assumes the values 3, 12, 15, –21; when x has values 3, 2, 1, –1 respectively.

(b) Using Euler's method with step-size 0.1, find the value of $y(0.5)$ from the following differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2,\ y(0) = 0\ .$$

(अ) न्यूनतम घात वाला बहुपद ज्ञात कीजिए जो मान 3, 12, 15, –21 ग्रहण करता है, जबकि x के मान क्रमश: 3, 2, 1, –1 हैं ।

(ब) पद लम्बाई 0.1 लेते हुए ऑयलर विधि का प्रयोग कर निम्न समीकरण से $y(0.5)$ का मान ज्ञात कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \; y(0) = 0$$