

This question paper contains 8+4 printed pages]

H.P.A.S. (Main)—2016

MATHEMATICS

Paper I

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 100

Note :— The question paper has 8 questions. Answer any 5 questions. Question no. 1 is compulsory.

प्रश्न-पत्र में 8 प्रश्न दिये गये हैं। किन्हीं 5 प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न क्र. 1 अनिवार्य है।

1. (a) Determine all values of d for which rank of the matrix :

$$\begin{pmatrix} d & -1 & 0 & 0 \\ 0 & d & -1 & 0 \\ 0 & 0 & d & -1 \\ -6 & 11 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

is equal to 3.

(b) Show that the vectors $v_1 = (1, 1, 2, 4)$,

$$v_2 = (2, -1, -5, 2), v_3 = (1, -1, -4, 0) \text{ and}$$

$$v_4 = (2, 1, 1, 6) \text{ are linearly dependent in } \mathbb{R}^4.$$

(c) Evaluate :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{1/x^2}$$

(d) Find the angle between the surfaces :

$$x \log z = y^2 - 1 \text{ and } x^2 y = 2 - z$$

at point $(1, 1, 1)$.

(e) Show that the Legendre polynomial $P_n(x)$ satisfies

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

(अ) d के सभी मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए आव्यूह :

$$\begin{pmatrix} d & -1 & 0 & 0 \\ 0 & d & -1 & 0 \\ 0 & 0 & d & -1 \\ -6 & 11 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

की जाति 3 है।

(ब) सिद्ध कीजिए कि सदिश $v_1 = (1, 1, 2, 4)$,

$v_2 = (2, -1, -5, 2)$, $v_3 = (1, -1, -4, 0)$ तथा

$v_4 = (2, 1, 1, 6)$, \mathbb{R}^4 में रैखिक आश्रित हैं।

(स) निम्न का मूल्यांकन कीजिए :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{1/x^2}$$

(द) पृष्ठों $x \log z = y^2 - 1$ तथा $x^2 y = 2 - z$ के मध्य

का कोण, बिन्दु $(1, 1, 1)$ पर ज्ञात कीजिए।

(य) सिद्ध कीजिए कि लैजेन्ड्रे बहुपद $P_n(x)$:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

को संतुष्ट करता है।

2. (a) Let T be a linear operator on \mathbf{R}^3 defined by

$$T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z).$$

Show that T is invertible and determine T^{-1} .

(b) Determine the value of a and b so that the system of equations :

$$2x + 3y + 5z = 9$$

$$7x + 3y - 2z = 8$$

$$2x + 3y + az = b$$

has :

- (i) no solution
- (ii) a unique solution
- (iii) an infinite number of solutions.

(अ) कि माना T , \mathbb{R}^3 में एक रेखिक रूपान्तरण है जो कि

$$T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$$

से परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि T एक व्युत्क्रमणीय है तथा T^{-1} ज्ञात कीजिए।

(ब) a तथा b का मान ज्ञात कीजिए जबकि समीकरणों के निकाय :

$$2x + 3y + 5z = 9$$

$$7x + 3y - 2z = 8$$

$$2x + 3y + az = b$$

(i) का कोई हल नहीं है।

(ii) का एक अद्वितीय हल है।

(iii) के अनन्त संख्या में हल हैं।

3. (a) Show that the function f defined on \mathbf{R} by :

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{if } x \text{ is irrational} \\ -x, & \text{if } x \text{ is rational} \end{cases}$$

is continuous only at $x = 0$.

(b) Find the asymptotes of the curve :

$$2x^3 - 5x^2y + 4xy^2 - y^3 + 6x^2 - 7xy + y^2 - x + 5y - 3 = 0.$$

(अ) सिद्ध कीजिए कि फलन f जो कि वास्तविक रेखा \mathbf{R} पर निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{जब } x \text{ एक परिमेय संख्या है।} \\ -x, & \text{जब } x \text{ एक अपरिमेय संख्या है।} \end{cases}$$

केवल $x = 0$ पर सतत् है।

(ब) निम्नलिखित वक्र के अनन्तस्पर्शी ज्ञात कीजिए :

$$2x^3 - 5x^2y + 4xy^2 - y^3 + 6x^2 - 7xy + y^2 - x + 5y - 3 = 0.$$

4. (a) Find the extreme values of $f(x, y, z) = 2x + 3y + z$ such that $x^2 + y^2 = 5$ and $x + z = 1$.

(b) Evaluate the integral :

$$\int_0^2 \int_0^{y^2/2} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} dx dy.$$

(अ) फलन $f(x, y, z) = 2x + 3y + z$ का चरम मान ज्ञात कीजिए जबकि $x^2 + y^2 = 5$ तथा $x + z = 1$ दिया गया है।

(ब) निम्न समाकल का मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^2 \int_0^{y^2/2} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} dx dy.$$

5. (a) Determine the general and singular solution of the non-linear differential equation :

$$y = xy' + (y')^2.$$

- (b) Solve the differential equation :

$$(D^2 - 2D + 2)y = e^x \tan x.$$

where $D = \frac{d}{dx}$

- (अ) निम्नलिखित गैर-रेखीय अवकल समीकरण के सामान्य तथा

विलक्षण मान ज्ञात कीजिए :

$$y = xy' + (y')^2.$$

- (ब) अवकल समीकरण :

$$(D^2 - 2D + 2)y = e^x \tan x$$

जहाँ $D = \frac{d}{dx}$ है, को हल कीजिए।

6. (a) Find the directional derivative of the scalar function $\phi = xy^2 + yz^3$ at point $(2, -1, 1)$ in the direction of the normal to the surface $x \log z - y^2 = -4$ at point $(-1, 2, 1)$.

(b) Show that the field of force given by :

$$\vec{F} = (y^2 \cos x + z^3)i + (2y \sin x - 4)j + (3xz^2 + 2)k$$

is conservative and find the work done in moving the particle in the field from a point A (0, 1, -1) to a point B ($\pi/2$, -1, 2).

(अ) अदिश फलन $\phi = xy^2 + yz^3$ का बिन्दु (2, -1, 1) पर पृष्ठ $x \log z - y^2 = -4$ के बिन्दु (-1, 2, 1) पर लंबारूप की दिशा में दिशात्मक डेरिवेटिव क्या है ?

(ब) सिद्ध कीजिए कि सदिश फलन

$$\vec{F} = (y^2 \cos x + z^3)i + (2y \sin x - 4)j + (3xz^2 + 2)k$$

अपरिवर्तनवादी है तथा इसके अदिश पोटेंशियल ज्ञात कीजिए। बिन्दु A (0, 1, -1) से बिन्दु B ($\pi/2$, -1, 2) तक कण द्वारा चलने में किया गया कार्य ज्ञात कीजिए।

7. (a) Show that the equation :

$$2x^2 - 6y^2 - 12z^2 + 18yz + 2zx + xy = 0$$

represents a pair of planes and find the angle between them.

(b) Find the equations of the tangent planes to the hyperboloid $2x^3 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ which pass through the lines $3x - 3y + 6z - 5 = 0$ and $x + 9y - 3z = 0$.

(अ) सिद्ध कीजिए कि समीकरण :

$$2x^2 - 6y^2 - 12z^2 + 18yz + 2zx + xy = 0$$

समतलों के जोड़े का प्रतिनिधित्व करता है तथा इनके बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

(ब) अतिपरवलयज $2x^3 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ के स्पर्श समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जोकि रेखाएँ $3x - 3y + 6z - 5 = 0$ तथा $x + 9y - 3z = 0$ से गुजरती है।

8. (a) Let V be a finite dimensional inner product space over field F , and let $g : V \rightarrow F$ be a linear transformation. Then show that there exists a unique vector $y \in V$ such that $g(x) = \langle x, y \rangle$ for all $x \in V$.

(b) A particle moves in a plane in such a manner that its tangential and normal accelerations are always equal and its velocity varies as $e^{\tan^{-1}(s/c)}$, s being the length of the arc of the curve measured from a fixed point on the curve. Find the path.

(अ) माना V एक ज्ञात विमीय आंतर गुणन समष्टि, क्षेत्र F पर है तथा माना $g : V \rightarrow F$ एक रैखिक रूपान्तरण है। सिद्ध कीजिए कि एक अद्वितीय सदिश $y \in V$ का आस्तित्व होगा जबकि सभी $x \in V$ के लिए $g(x) = \langle x, y \rangle$ ।

(ब) एक कण समतल में इस तरह गतिमान होता है कि इसके स्पर्शीय तथा लंबारूप त्वरण हमेशा समान होते हैं तथा इसका वेग $e^{\tan^{-1}(s/c)}$ से भिन्न है जहाँ s वक्र के चाप, जोकि एक निश्चित बिन्दु से मापित है, की लम्बाई है, पथ ज्ञात कीजिए।