

H.P.A.S. (Main)—2016

MATHEMATICS

Paper II

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 100

Note :— The question paper has 8 questions. Answer any 5 questions. Question No. 1 is compulsory.

प्रश्न-पत्र में 8 प्रश्न हैं। किन्हीं 5 प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रश्न क्र. 1 आवश्यक है।

1. (a) Show that :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots \right\} = 1.$$

(b) Show that :

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$$

has a derivative at the origin.

P.T.O.

- (c) Determine the inverse Laplace transform of $\frac{e^{-1/s}}{s}$.
- (d) Let G be a group of all 2×2 non-singular matrices with the real entries. Determine the centre of G .
- (e) From partial differential equation by eliminating the arbitrary function ϕ from the equation :

$$lx + my + nz = \phi(x^2 + y^2 + z^2).$$

(अ) सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots \right\} = 1.$$

(ब) सिद्ध कीजिए कि फलन :

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$$

मूल बिन्दु पर एक अवकलज रखता है।

(स) फलन $\frac{e^{-1/s}}{s}$ का प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात कीजिए।

(द) माना G एक सभी 2×2 व्युत्क्रमणीय आव्यूहों का समुच्चय सभी वास्तविक संख्याओं पर है। इस समुच्चय G का केन्द्र ज्ञात कीजिए।

(य) स्वेच्छ फलन ϕ का निरसन करके आंशिक अवकल समीकरण, समीकरण :

$$lx + my + nz = \phi(x^2 + y^2 + z^2)$$

से ज्ञात कीजिए।

2. (a) On which curve the functional :

$$\int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2 + 2xy) dy$$

with $y(0) = 0$ and $y(\pi/2) = 0$, be extremized ?

(b) Evaluate the integral :

$$\int_C \sqrt{z} dz, \text{ where } C : z = z(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(अ) किस वक्र के लिए, फलनक :

$$\int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2 + 2xy) dy$$

प्रारम्भिक प्रतिबंधों $y(0) = 0$ तथा $y(\pi/2) = 0$ के साथ बाध्य है।

(ब) समाकलन $\int_C \sqrt{z} dz$ जहाँ $C : z = z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ का मूल्यांकन कीजिए।

3. (a) Show that converse of Lagrange's theorem holds in finite cyclic group.

(b) Give an example of two subgroups H and K which are not normal, but HK as a subgroup.

P.T.O.

(अ) सिद्ध कीजिए कि लाग्रान्ज प्रमेय का व्युत्क्रम ज्ञात चक्रीय समुच्चयों के लिए लागू होता है।

(ब) दो उपसमुच्चयों H तथा K का उदाहरण दीजिए जो नार्मल नहीं है। लेकिन HK एक उप-समुच्चय है।

4. (a) Find out whether the series :

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{3^3 x^3}{3!} + \dots$$

is convergent or divergent for $x \in \mathbf{R}^+$?

(b) By using Cauchy Residue theorem, evaluate the integral :

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^6 + 1} dx.$$

(अ) ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित श्रेणी अभिसारी है या अपसारी है :

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{3^3 x^3}{3!} + \dots \quad x \in \mathbf{R}^+ \text{।}$$

(ब) कौशी अवशेष प्रमेय का प्रयोग करते हुए, समाकलन :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx$$

का मूल्यांकन कीजिए।

5. (a) Determine the bilinear transformation that maps the points $z = 0, -i, 2i$ into the points $w = 5i, \infty, -i/3$ respectively. What is the image of $|z| < 1$ under this transformation ?
- (b) If $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ is continuous on $[a, b]$, then show that function is Riemann-integrable on $[a, b]$.

(अ) एक द्विरैखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिए जो कि बिन्दु $z = 0, -i, 2i$ को बिन्दु $w = 5i, \infty, -i/3$ पर क्रमशः चित्रित करता है तथा $|z| < 1$ की छवि इस रूपान्तरण के अन्तर्गत क्या है।

(ब) यदि $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ एक सतत फलन अन्तराल $[a, b]$ पर है। तब सिद्ध कीजिए कि $f(x)$ एक रिमान समाकलित फलन अन्तराल $[a, b]$ पर है।

6. (a) Show that the identity :

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

is not always valid with the help of an example.

(b) Let (X, d) be a metric space. Show that the function d^* defined by :

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

for all $x, y \in X$ is a metric on X .

P.T.O.

(अ) एक उचित उदाहरण की सहायता से सिद्ध कीजिए कि सर्वसमिका :

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

सर्वथा मान्य नहीं है।

(ब) माना (X, d) एक मेट्रिक समष्टि है। सिद्ध कीजिए कि फलन d^* जो कि निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

$x, y \in X$, मेट्रिक है।

7. (a) By using Newton-Raphson method, find a root of the equation ;

$$x \sin x + \cos x = 0.$$

- (b) Determine the cubic polynomial which takes the following values :

$$y(0) = 1, y(1) = 0, y(2) = 1, y(3) = 10..$$

- (अ) न्यूटन-राफसन विधि का उपयोग करते हुए, समीकरण :

$$x \sin x + \cos x = 0$$

का एक मूल ज्ञात कीजिए।

- (ब) निम्नलिखित मानों से त्रिघात बहुपद ज्ञात कीजिए :

$$y(0) = 1, y(1) = 0, y(2) = 1 \text{ और } y(3) = 10$$

8. (a) Draw a flowchart to find the roots of a quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$.
- (b) Find a complete integral of partial differential equation $(p + q)(px + qy) = 1$.

(अ) द्विघातीय समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल निकालने के लिए एक प्रवाह अथवा अनुक्रम चार्ट बनाइये।

(ब) आंशिक अवकल समीकरण

$$(p + q)(px + qy) = 1$$

का पूर्ण समाकलन ज्ञात कीजिए।